现代数学基础丛书 153

拓扑群引论

（第二版）

黎景辉　冯绪宁　著

科学出版社

(O-5424.01)

科学数理分社
电　话：(010) 64033664
E-mail：math-phy@mail.sciencep.com
网　址：http://www.math-phy.cn

销售分类建议：高等数学

www.sciencep.com



定　价：85.00 元

华罗庚-吴文俊数学出版基金资助项目

现代数学基础丛书 153

拓扑群引论

(第二版)

黎景辉　冯绪宁　著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书介绍了拓扑群的基本概念、测度与积分、拓扑群(特别是紧、局部紧的拓扑群)的表示，同时讨论齐性空间、群代数和K理论的一些相关结果. 内容由浅入深，直至近代的重要成果.

本书适于大学数学系本科生和研究生阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

拓扑群引论/黎景辉，冯绪宁著. —2版. —北京：科学出版社，2014.3
(现代数学基础丛书；153)
ISBN 978-7-03-039779-9
Ⅰ. 拓… Ⅱ. ①黎… ②冯… Ⅲ. ①拓扑群-群论 Ⅳ. O152.4
中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第028338号

责任编辑：赵彦超 李静科／责任校对：桂伟利
责任印制：赵德静／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1991年3月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2014年3月第 二 版 印张：17
2014年3月第四次印刷 字数：318 000

定价：85.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言, 书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍, 从中汲取营养, 获得教益.

20 世纪 70 年代后期, 我国的数学研究与数学书刊的出版由于 "文化大革命" 的浩劫已经破坏与中断了 10 余年, 而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后, 我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述. 据此, 科学出版社陆续推出了多套数学丛书, 其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出, 前者出版约 40 卷, 后者则逾 80 卷. 它们质量甚高, 影响颇大, 对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者, 针对一些重要的数学领域与研究方向, 作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识, 又反映其新发展, 力求深入浅出, 简明扼要, 注重创新.

近年来, 数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用, 还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持, 编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展, 使它越办越好, 为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨　乐

2003 年 8 月

第 二 版 序

群是一种代数结构. 一个拓扑群是指一个带有拓扑空间结构的群. 本书的目的是介绍拓扑群及其有关结构的性质.

这是一部拓扑群引论. 开始的两章是 "论" 的部分. 第 1 章从拓扑群的定义开始讲, 然后直接推出拓扑群的初步性质. 每个拓扑空间都有一个自然的测度. 拓扑群有一个很特别的测度——不变测度, 这是在第 2 章讨论的. 学习这一章读者需要实分析里测度论的知识.

从第 3 章开始是 "引" 的部分, 也就是说引导读者学习一些与拓扑群有关的学问, 所以有些材料是介绍性的, 希望引起读者的兴趣, 去学习所引用的参考资料. 从第 3 章开始我们不断提高对读者的数学知识水平的要求.

与一个群 G 有关的最基本结构是由它的全部表示所组成的集合 $\mathscr{R}(G)$. 如果 G 是一个拓扑群, 则便要考虑它的全部连续表示所组成的集合 $\mathscr{R}(G)$. 在第 3 章我们把实变函数的 Fourier 级数与 Fourier 积分理论推广至拓扑群上. 学过调和分析的读者会比较容易明白第 3 章. 在这一章我们看到当群 G 的运算交换时, 它的不可约连续表示是一维的, 这样便可以完全确定它的全部连续表示. 余下在不假设交换条件下分开紧群和局部紧群两个情形来讨论. 当 G 是紧群时, 它的不可约连续表示是有限维的. 但是任意局部紧群是可以有无限维不可约连续表示的. 从第 4 章到第 7 章我们讲紧群表示、齐性空间与表示、群代数和 K 理论.

这是一部数学分析的教本. 不要因为这个 "群" 字便认为本书是讲代数或数论的. 当然本书的理论是数论的一个非常有力的工具. 看看华罗庚先生的《数论导引》《堆垒素数论》《指数和的估计及其在数论中的应用》便会找到这方面的经典例子. 也可以看看我的观点 —— 谈谈代数数论 (《数学通报》, 2013 年 52 卷第 5, 6 期) 及 Langlands 的呼吁 "beyond endoscopy". 我们的目的是问: 若把数学分析中的定理中的实数换为拓扑群, 则可以得到什么结果? 比如我们可以把单变元的模函数理论推广为代数群的自守表示理论. 另一方面当我们开发了拓扑群这个园地之后, 我们发现了经典理论里没有的研究方向, 例如对偶理论与 Kac 代数及淡中范畴、C* 代数及拓扑群 K 理论等.

有人会问拓扑群是否是一个不自然的怪物, 在这里可以回答：不是的. 实数域 $\mathbb{R}$ 便是一个局部紧交换拓扑群! 实数 $\mathbb{R}$ 有了拓扑才有连续函数, 有了群结构 (即加法) 才可以定义周期函数, 即满足条件 $f(x+1)=f(x)$ 的函数 f. 有周期函数, 便有 Fourier 级数. 今日数理化生学家、工程师、心脏病医师都是不能没有 Fourier 分

析这种工具的. 著名的 Bourbaki 数学系列便是从拓扑群开始, 然后用拓扑群造出实数域之后, 才介绍实变函数论、积分论. 也就是说 Bourbaki 把数学分析建立在拓扑群理论上.

可以说有了实数域 $\mathbb{R}$, 再加上 n 维度量空间 $\mathbb{R}^n$, 便已有很丰富的 Fourier 分析, 那为什么还需要知道一般的拓扑群呢? 下面举个例子: 2×2 矩阵群

$$SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

这是一个和 $\mathbb{R}^n$ 完全不同的拓扑群, $SL_2(\mathbb{R})$ 的乘法不是交换的, 而 $\mathbb{R}^n$ 是交换拓扑群. 使用 $SL_2(\mathbb{R})$ 的 Fourier 分析我们证明了悬疑了四百多年的费马大定理. 还有很多其他的例子. Gell-Mann 使用拓扑群 $SU(3)$ 的表示理论研究基本粒子而获得了诺贝尔物理学奖. 没有拓扑群便无法谈杨振宁的 Mills 规范场论. 今日从电话到电视, 从雷达到导弹制控都离不开数字通信. 在数字通信中几乎到处都用到调和分析. 拓扑群的调和分析可以说是所有调和分析的基本范例, 是一个丰富又有很多应用的学问, 值得我们学习和研究.

我们假定读者已有数学系、物理系高年级的数学知识, 如基础代数、一般拓扑学、实变函数论、复变函数论、泛函分析. 我们会引用一些有关的教本, 这些教本是我们手边有的, 读者可能未见过. 我们建议同学继续用你原来学习时使用的材料, 把我们所引用的看作参考资料便好了.

我们相信拓扑群引论是一门非常适合大学四年级下学期的课程, 比如可以用第 1 章、第 2 章作为讲课用, 可以从其余各章选一些合适的材料作讨论班用. 我希望更多的学校愿意开这门课. 读者亦可以用本书自学拓扑群. 对目前我国的大学生来讲, 我们不会说: 读这本书易如反掌. 可以懂多少便看多少, 不懂的看看引用的参考资料以增广背景知识, 然后再看便懂了. 数学学习像举重一样, 是一个个人锻炼积累的过程, 不可以只靠听课的.

为了帮助初学的读者了解本书, 先谈谈本书的结构与内容. 在未看本书之前, 这是比较难懂的. 我们建议读者先看一遍, 以后每读一章再看一遍, 渐渐便会懂了.

本书的第 1 章是讲拓扑群的基本性质: 主要是介绍在有了拓扑的情况后群的基本操作, 包括子群、商群、乘积、反向极限. 我们假定读者有点代数 (如群论) 和拓扑空间的知识. 若你只想知道什么是拓扑群, 看完这章便可停了, 不过这样你便可能错过了数学的一个宝库! 当我们说起拓扑群的时候心里常是想着有限维实李群 (如: 项武义《李群讲义》; 严志达《李群和微分几何》; 严志达, 许以超《李群及其李代数》; 许以超《李群与 Hermite 对称空间》), 我们建议读者也应留意无穷维李群 (见 Omori, *Infinite Dimensional Lie Group*, AMS; Edward Frenkel, *Langlands Correspondence for Loop Groups*, Cambridge). 另外近年来又出版了一些不是讲实李

群的新书, 如 Schneider, *p-adic Lie Groups*; Ribes, *Profinite Groups*; Dixon, *Analytic pro-p Groups*. 这些都是值得我们留意的.

群 G 有了拓扑便可以考虑 G 上的连续函数 $f: G \to \mathbb{C}$(这里 $\mathbb{C}$ 是指复数域), 进一步便可以问函数 f 有没有积分, 即是否存在 $\int_G f(x)dx$? 也就是说我们要求在 G 上构造一个测度. 我们假定读者已有实变函数论和测度论的知识. 不像一般的空间, 我们还有群的结构, 所以还可以要求这个积分和群的乘法有一定的共系, 这是用所谓 Haar 测度来定义的不变积分. 在第 2 章我们讲了局部紧拓扑群的不变积分. 这里"不变"是大大地推广了以下的实数上的积分公式: 若实变函数 f 可积, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+a)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

对任何常实数 a 都成立. 如果群 G 的拓扑不是局部紧, 则 G 是没有 Haar 测度的. 在数论与量子场论中就有必要考虑不是局部紧的拓扑群. 这时没有了 Haar 积分, 但是正因为此而带来了新的发现和应用!

设 V 是定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间, 由所有从 V 到 $\mathbb{C}$ 的线性函数 $\phi: V \to \mathbb{C}$ 所组成的集合 V^* 亦有线性空间结构, 常称 V^* 为 V 的对偶空间. V 与 V^* 的对偶关系是线性空间的基本结构. 当 G 是一个拓扑群, 以 $C(G)$ 记由 G 上的连续函数所组成的线性空间时, 从 G 上的一个测度 μ 便得出 $C(G)$ 上的线性函数

$$C(G) \ni f \mapsto \int_G f d\mu \in \mathbb{C}.$$

这样便可以把测度 μ 看成 $C(G)$ 的对偶空间 $C(G)^*$ 的一个元素了. 当 V 是拓扑线性空间的时候, 研究 V 和它的对偶 V^* 是初等泛函分析的课题, 这也就是教科书所讲的分布或广义函数的章节, 读者是不可不读的. 这样第 2 章我们所讲的拓扑群的积分可以看作广义函数论重要的例子.

一般的拓扑群的结构是非常复杂的. 为了把问题简化, 我们便对群要求一些条件. 最简单的便是要求群 G 的运算是可交换的, 即 $xy = yx$. 最能够反映 G 是拓扑群的连续函数便是连续的群同态 $\chi: G \to S$, 即满足 $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$ 并且 χ 是连续函数. 在这里 S 是指绝对值是 1 的复数集合. 交换局部紧拓扑群的表示基本上就是这些 χ 了. 这样的 χ 所组成的集合 $\hat{G}$ 亦是一个拓扑群, 称为 G 的对偶群. 这是在第 3 章讲的.

第 3 章所讲的局部紧交换拓扑群 G 和它的对偶群的关系正是多元 Fourier 级数和 Fourier 积分的同步完满的推广, 可见这是非常重要的. 例如在 Weil 的基础数论第 1 章, 他就用这一理论来讲 p-adic 数的 Fourier 分析. 进一步, 整个半单李群 G 的无穷维表示理论都是从 G 的极大交换子群的特征标出发的! 在第 3 章用群 G 的内在结构来讲它的对偶. 另外一个常用的方法是用 G 的函数空间. 第 3 章的习题

便是用这个方法把第 3 章的全部定理重证一次. 这些习题是不可不做的. 在 3.3 节中的对偶定理是说什么呢? 我们以 $\hat{G}$ 记 G 的全部一维表示, 则对偶定理即: 当 G 是交换群时, 我们可以从 $\hat{G}$ 把 G 构造出来. 这是一个很重要的现象. 对一个一般的群 G 是没有 3.3 节这个对偶定理的. 这时可以问由 G 的全部表示所组成的范畴 $\mathscr{R}(G)$ 需要有什么结构才可以从 $\mathscr{R}(G)$ 把 G 构造出来. 3.4 节是讲 Fourier 变换. 不言而喻这是很重要的. 读者应该和 $\mathbb{R}^n$ 的 Fourier 变换作比较 (例如 Stein 和 Weiss 写的*Fourier Analysis on Euclidean Spaces*). Poisson 求和公式和 Tauber 型定理都是数论中常见的定理, 在华罗庚的《数论导引》里就有了. 关于 Tauber 型定理可以看一部新书 [Kor 04]. Poisson 求和公式就是交换群的迹公式, 自 2008 年菲尔兹奖获得者 Lafforgue 提出非线性 Poisson 公式猜想后, 该猜想非常值得我们注意.

从拓扑群 G 我们得出线性空间 $C(G)$. 因为我们对线性空间了解得比较多, 所以我们很自然希望用 $C(G)$ 的线性结构去了解原来所知不多的拓扑群 G. 当我们系统地处理这个想法时便得到群表示论.

设 V 是线性空间, 以 $GL(V)$ 记 V 到 V 的所有线性自同构所组成的集合. 通过线性变换的合成得出 $GL(V)$ 的群结构. 所谓群 G 的一个表示是指一个群同态 $\pi : G \to GL(V)$, 空间 V 的维数便称为 π 的维数. 当 G 是有限群, 一般只要用到有限维表示; 当 G 不是有限群, 就不能不考虑 G 的无穷维表示, 例如拓扑群 $SL_2(\mathbb{R})$ 就有很有趣的无穷维表示. 这是物理学家 Bargmann 最先系统地研究出来的.

关于群表示我再说一点. 还是从 S 是指绝对值是 1 的复数所组成的紧交换群说起. S 的表示都是 1 维的. S 的所有表示就是连续群同态 $\chi_n : S \to S$, $\chi_n(z) = e^{inz}$, n 是任意整数. 也就是说 S 的对偶群 $S^* = \{\chi_n : n \in \mathbb{Z}\}$, 其中 $\mathbb{Z}$ 是整数群. 我们也说 S^* 是 $\mathbb{Z}$. 以 $L^2(S)$ 记 S 上 2 次可积函数所组成的空间. 对 $f \in L^2(S)$ 我们可以计算 f 的 Fourier 系数

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_S f(z)\chi_n(z)dz,$$

则 f 的 Fourier 级数

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\chi_n(z)$$

在 $L^2(S)$ 内收敛于 f. 我们把 S^* 看作 S 的谱, 把 f 的 Fourier 级数看作 f 的谱分解. 第 3 章就是把这个 Fourier 级数理论中的第一步推广到局部紧交换群上. 但是 Fourier 级数理论有很多细致的成果和应用, 看看我国从陈建功到王斯雷等的工作, 在国外除了经典的作品如 [Zyg 59], [BC 49], [SW 71] 之外, 最近有很多新书: [DE 09], [Duo 00], [Gra 08], [Gra 09], [PW 13], [SS 03]. 并且每年都有 Salem 奖得主的工作 (有人说 Salem 奖是菲尔兹奖的预备奖, Charles Fefferman, Jean Bourgain, Jean-Christophe Yoccoz, Curtis T. McMullen, Terence Tao, Stanislav Smirnov, Elon

Lindenstrauss 都是先拿 Salem 奖然后得菲尔兹奖的). 我们可以问：这些细致的 Fourier 级数成果在局部紧交换群上是怎样的? 举个例子, 看看我们在第 3 章讲的 Tauber 型定理. 比如计算一个代数簇的点数就用上了 Tauber 型定理. 我们都喜欢高谈什么纲领, 什么范畴之间的对应, 实质上这些都深藏了算术不变量与 Fourier 系数的关系.

另一方面, 如果我们不要求 "交换" 这个条件, 也就是说研究一般的局部紧拓扑群 G 的表示, 问题就难得多了! 我们以 $\mathscr{R}G$ 记 G 的所有连续表示所组成的集合. 第一, $\mathscr{R}G$ 比 G^* 大多了. 第二, $\mathscr{R}G$ 没有群的结构. 第三, 我们应该怎样在 $\mathscr{R}G$ 上放一个合适的拓扑? 第四, 怎样构造出 $\mathscr{R}G$ 内所有的元素? 当 G 是实半单李群的时候, Harish-Chandra 回答了这些问题. 日后又有 Langlands 及 Vogan 把 $\mathscr{R}G$ 的元素作分类. 又有 Atiyah (1966 年菲尔兹奖获得者) -Schmidt 用算子代数及 Kashiwara-Schmidt 用 D-模方法构造表示. 但是如果 G 是 p-adic 李群, 表示空间是 p-adic 拓扑空间的时候, 这些结果与方法会是怎样的, 没有人知道.

在第 4 章我们首先问一般的局部紧拓扑群 G 的表示 $\pi : G \to GL(V)$ 起码有什么基本的性质. 在一个李群 G 上, 不同的微分算子便在 G 的可微函数空间 $D(G)$ 上决定一些半范, 于是 $D(G)$ 便有局部凸线性拓扑空间的结构. 这也不是偶然的, 我们看看 $\mathbb{R}^n$ 的广义函数论便知道了. 自然而然, 当我们考虑一般的拓扑群表示 $\pi : G \to GL(V)$ 时, 便经常假设 V 是局部凸线性拓扑空间了. 如此, 正如我们学习有限群表示时先要懂一些线性空间和线性变换, 现在学拓扑群表示, 便要同时学些线性拓扑空间和算子代数的理论. 不过开始的时候, 读者可以把 4.1 节中的局部凸线性拓扑空间看作 Hilbert 空间, 这也许易懂一点. 在这一节除了讲无穷维表示的基本性质之外, 又有很多非常重要的例子, 如 $SL_2(\mathbb{R})$ 的离散序列的构造及证明 (这是对应于模形式理论的尖形式, 是书外的事了). 在本书中常引一些泛函分析的定理, 我的用意是希望读者去读一些泛函分析的教科书. 没有这些背景, 从第 4 章开始是比较难懂的. 我再强调：先学线性代数, 次学泛函分析以求掌握拓扑群的“线性”结构, 不单是过去, 就是 21 世纪为了数论的 p-adic Langlands 理论的需要, 学生都学了 p-adic Banach 空间理论, 其中 p-adic Fredholm 算子理论几十年前就由著名数论家 Serre 发展起来了.

在 4.2 节我们又加入了一个特殊条件：就是要求群 G 的拓扑是紧的. 这就让我们更深入地确定 G 的表示. 首先紧拓扑群的酉表示是有限维表示的直和, 也就是说对紧群来讲只要知道它的有限维表示便足够了, 这是很大的简化. 这一节的中心定理是 Peter-Weyl 定理 (定理 4.2.9). 这个定理决定了紧群 G 的二次可积函数与 G 的表示的关系, 及决定 G 的 Fourier 级数理论. 当知道实变函数的 Fourier 级数是研究定义在单位圆 $S = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ 上的函数, S 是个交换紧群, 而 Peter-Weyl 定理实际上是把经典的 Fourier 级数理论大大地推广到非交换的紧群上时, 这是很

大的进步！当然我们只能在这短短的几页讲些初步的结果. 学习更深入的理论, 我们不应忘记华罗庚、龚昇、陆启铿、钟家庆的非常出色的成果.

我们在 4.3 节讲淡中对偶. 这个理论显示出范畴学在表示论的应用. 淡中范畴是代数几何学的重要概念.

在第 5 章我们讲齐性空间与拓扑群表示. 在 5.1 节, 我讲了紧齐性空间的迹公式. 这是自守形式理论的重要工具 —— 迹公式的原始例子. 现行有两种迹公式, 一种是由 Selberg 提出, 由 Arthur 发展的; 另一种迹公式是: 相对迹公式 (最早见: Jacquet, 黎景辉, Sur une formule des traces relatives, *C. R. Academy Sc. Paris*, 296 (Juin ,1983) Serie I, 959~963). 5.2 节讲算术商的谱分解. 为何要有 5.2 节？这是为将要学习模形式理论的读者提供一个起步的例子. 设拓扑群 G 是 2×2 矩阵群 $SL_2(\mathbb{R})$, Γ 是 G 的子群

$$SL_2(\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}: a,b,c,d\text{是整数},\ ad-bc=1\right\},$$

H 是拓扑空间 $\Gamma\backslash G$ 上的二次可积函数所组成的 Hilbert 空间.

通过以下公式, G 作用在 H 上, 就是说有一个表示 $\rho: G\to GL(H)$. 取 $x\in G$, $\phi\in H$, 设 $(\rho(x)\phi)(s)=\phi(sx)$, 其中 $s=\Gamma g\in\Gamma\backslash G$, $sx=\Gamma gx$. 5.2 节是介绍这个 $SL_2(\mathbb{R})$ 的表示 ρ 的谱分解. 不像紧算子的谱, 这时这个谱有离散部分, 有连续部分！要了解这一章的各个公式便要有起码的算子代数中的谱分解理论的知识. 可以说这一章是我和蓝以中的书的一个特例, 比如在这一章说明了模形式中的 Eisenstein 级数不是一个特殊级数这么简单, 而是构成这个表示的连续谱. 这一章原是 Selberg 的工作 (Selberg 得 1950 年菲尔兹奖), 他一直没有发表, 直至去世之前在他的*Collected Works*中才找出来. 把这一理论推广至任意李群是 Langlands 在模形式论的一个伟大贡献. 在此顺便一提, 在 Selberg 与我的谈话中, 他是非常重视积分算子在拓扑群的调和分析中的应用的. 值得指出：这一小节所讲的 Eisenstein 级数的方法正是 Langlands 大作中秩 1 时的特例 (可与 Langlands, Eisenstein series, Proc. Sympo. AMS Alg Group and Discontinuous Subgroups 比较).

让我们来了解一下这个 $\Gamma\backslash G=SL_2(\mathbb{Z})\backslash SL_2(\mathbb{R})$ 空间. 我们首先考虑实数 $\mathbb{R}$. 用整数 $\mathbb{Z}$ 通过平移作用在 $\mathbb{R}$ 上, 即：对 $n\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{R}$, n 对 x 的作用就是 $n+x$. 这个作用的轨迹所组成的集合就是商空间 $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$. 我们有投射

$$\mathbb{R}\to\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}: x\mapsto [x],$$

其中 $[x]$ 是包含 x 的轨迹 (或陪集). 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 是周期为 1 的函数, 即是 $f(x+1)=f(x)$, 于是 $f(n+x)=f(x)$ 对所有 $n\in\mathbb{Z}$ 成立. 我们便可以定义 $f([x])$ 为 $f(x)$. 我们看到周期函数就是商空间 $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ 上的函数.

我们可以把陪集空间 $\Gamma\backslash G = SL_2(\mathbb{Z})\backslash SL_2(\mathbb{R})$ 作为 $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ 的推广. 这时定义在 $\Gamma\backslash G$ 上的函数便是 $G = SL_2(\mathbb{R})$ 上带周期 $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ 的函数. 与 $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ 相比, 在 $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{R}$ 上的函数是 $\mathbb{R}$ 上以 $\mathbb{Z}$ 为周期, 此时周期群 $\mathbb{Z}$ 是可交换的, 而在 $SL_2(\mathbb{Z})\backslash SL_2(\mathbb{R})$ 时的周期群 $SL_2(\mathbb{Z})$ 是非交换的! 我们已知有交换周期群的函数的 Fourier 分析在数论中有非常重要的应用, 可以想象有非交换周期群的函数 (即模函数) 在数论中的应用当更厉害. 模形式理论在费马定理 $(x^n + y^n = z^n)$ 中的应用充分印证了模形式的威力. 记得我与华罗庚教授的谈话中, 他是非常关注模形式在数论的应用的. 他提及 Hilbert, Klein, Fricke, Courant 及 Weber 的书, 这些书很多图书馆都当作废纸处理掉了. 虽然今日的方法与往日不同, 但往日的结果常启发新的发现! 在这里我顺便说一句, 数学是一门累积性的科学, 每一层是建造在前面的基层上.

近年颇多国人研究自守形式, 在国内的大家都熟知, 在美国有张寿武、江迪华、杨同海、叶扬波、毛征宇等, 更年轻而有成的就不胜数了.

矩阵群 $SL_2(\mathbb{R})$ 是代数矩阵群 SL_2 的实有理点集. 在以上的结果中把 SL_2 换成一般的代数群便是自守表示理论. 学习代数群可看我和陈志杰、赵春来写的《代数群引论》(科学出版社, 2006). 要了解模形式理论在数论中的应用便要懂一些模形式几何理论, 读者可看我和赵春来写的《模曲线导引》(北京大学出版社, 2014).

现在谈自守表示理论一般是以 $G(F)\backslash G(\mathbb{A})$ 代替 $\Gamma\backslash G$, 这样第 5 章便有些过时的感觉, 但是如果你想和一些经典的公式作比较, 这一章仍是个有益的学习经验. 无独有偶, Borel 虽然讲过很多次 $\mathbb{A}$ 上的自守表示理论, 但他在 2008 年出版最后一部自守形式理论的教本 ([Bor 08] (冯绪宁笔记)) 上也是讲 $SL_2(\mathbb{R})$.

如果你想研究齐性空间的调和分析和偏微分方程理论, 这一章是个很好的例子. 例如可以和 Helgason 关于黎曼对称空间的调和分析作比较, 或更有趣的是研究 Flensted-Jensen (*Annals Math*, 1980, 111: 253~311) 的工作的推广. 更一般地, 设 G 作用在流形 M 上, 可以研究 G 在 $L^p(M)$ 上的表示的性质. 当 $p = 2$ 时这方面的结果非常丰富. 当 $p = 1$ 时 Varadarjan 和 Cowling 都有些工作. 在 $p \neq 1, 2$ 时所知就不多了.

在第 6 章我又回到一般局部紧拓扑群 G 上. 以 $L(G)$ 记由 G 上的可积函数组成的线性空间, 这是个 Banach 代数. 6.1 节的定理 6.1.2 讲的是 G 的表示和 G 的 Banach 代数 $L(G)$ 的表示的关系. 如果你有兴趣看看我和蓝以中写的《二阶矩阵群的表示与自守形式》(北京大学出版社, 1990), 就会发现我们在这部书中经常用到这个定理. 同样, 你若读 Jacquet Langlands 伟大的原创作亦见如此. 6.2 节介绍 Plancherel 定理, 如书上说原证是在 800 多页的书内, 我在本书中只能作个扼要的说明, 看不明白没有关系. 但是我为什么还提这回事? 这是因为如果你有一天要学习自守表示论, 你就得学习 Harish Chandra 的研究成果, 那就应当记得李群的 Plancherel 定理是他的中心思想及最终成果. 6.3 节讲 Fourier 代数并引导读者去看

现时研究对偶方法的 Kac 代数.

第 7 章讲 K 理论. 这是现在活跃的领域, 和非交换几何学有关. 我只是想借这个机会向大家介绍这个与拓扑群调和分析有关的一门重要的学问.

本书是《拓扑群引论》的第二版. 我们更正了第一版的印误, 做了新的参考文献 (删除部分旧的资料, 加入多个 2000 年后出版的项目), 每章增加一段引言介绍本章内容及相关领域发展. 第 3 章加了第 3.6 节讲 Tauber 型定理. 第 4 章改为紧群的表示, 其中新加了第 4.3 节讲淡中对偶及第 4.4 节讲李群. 用第一版的第 4.2 节和第 5 章改编为第 5 章——齐性空间, 并增加微分方程和微分算子两节. 第 6 章——群代数, 用第一版的第 4.3, 4.4 节并全新增补了 Fourier 代数. 第 7 章——K 理论, 是全新增写的.

第一版序所讲的是我对本书的看法与一些联想, 希望可以对初学读者有点帮助, 所以在本书再版时加进来. 最后, 再一次感谢我的合作人冯绪宁, 感谢赵春来帮助处理一些编校问题, 并感谢丁石孙、万哲先、王元、冯克勤及袁向东给予的勉励与支持, 感谢科学出版社的赵彦超和李静科编辑的大力协助.

本书第一版是铅印的, 这次用 Latex 重新排版, 错误在所难免, 我们尽力校对, 也望读者多多指正.

黎景辉
2013 年 7 月 16 日
于香港

第 一 版 序

本书的目的是为数论、李群论、表示论、微分几何与调和分析等分支学科的读者提供关于拓扑群理论的必要的背景知识. 例如, 对于学习数论的读者而言, 读了本书前三章后便可理解 A. Weil 在《数论基础》一书中的论述.

本书前两章介绍拓扑群和 Haar 积分的一般知识, 第三章讨论局部紧交换拓扑群. 只要了解初等群论和拓扑空间基础理论的读者便可阅读前三章. 第四章讨论局部紧群的表示. 第五章则将第四章结果应用于 $L^2(T\backslash G)$. 这两章要求读者具有基本的实分析和泛函分析知识. 对所引用的分析方面的定理, 我们常给出参考资料, 以便读者查阅.

为了阅读方便, 我们没有完全按照逻辑顺序编写, 例如在第三章中我们曾应用了两个在第四章中才证明的定理. 另有一些定理, 我们在不同的条件下不惜反复证明, 以使读者加深理解, 例如 Peter Weyl 定理, 我们将证明三次 (即分别在 G 是紧群、$\Gamma\backslash G$ 是紧齐性空间及 $\Gamma\backslash G$ 是尖形式空间 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$ 三种情况下证明). 又如关于 $L^2(\Gamma\backslash G)$, 我们分别对 $\Gamma\backslash G$ 是齐空间以及 $G = SL(2,\mathbb{R})$(这时, $SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})$ 不是紧空间) 的情形各讨论了一次. 反之, 为了限制书的篇幅, 对于一些很容易查到证明的定理 (如Тихонов定理), 我们则略去其证明.

为了方便查阅, 我们列出了为数不少的参考文献, 其中包括一些常见的教科书和文章.

本书前两章由冯绪宁执笔, 后三章由黎景辉执笔. 书中如有不足甚至错误之处, 盼望读者不吝指正.

黎景辉　冯绪宁

1988 年 1 月

目　　录

《现代数学基础丛书》序

第二版序

第一版序

第 1 章　拓扑群 ······ 1

1.1　群和拓扑空间 ······ 1

1.2　拓扑群 ······ 7

1.3　拓扑群的邻域组 ······ 10

1.4　子群和商群 ······ 13

1.5　拓扑群的积 ······ 19

1.6　分离性 ······ 20

1.7　连通性 ······ 23

1.8　拓扑变换群 ······ 27

1.9　反向极限和拓扑群 ······ 29

习题 ······ 32

第 2 章　拓扑群上的积分 ······ 35

2.1　测度 ······ 35

2.2　不变测度 ······ 42

2.3　Haar 测度的存在性和唯一性 ······ 48

2.4　Haar 测度的性质 ······ 56

2.5　相对不变测度 ······ 63

2.6　卷积 ······ 70

习题 ······ 72

第 3 章　局部紧交换群 ······ 75

3.1　对偶群 ······ 75

3.2　紧生成交换群的结构和对偶 ······ 81

3.3　对偶定理 ······ 84

3.4　Fourier 变换 ······ 85

3.5　Poisson 求和公式 ······ 90

3.6　Tauber 型定理 ······ 91

习题 ············ 103
第 4 章 紧群的表示 ············ 106
4.1 群表示 ············ 106
4.2 紧群的表示 ············ 125
4.3 紧群的淡中对偶 ············ 134
4.4 李群 ············ 138
习题 ············ 148
第 5 章 齐性空间 ············ 153
5.1 紧齐性空间 ············ 154
5.2 算术商的谱分解 ············ 163
5.3 微分方程 ············ 181
5.4 齐性空间的微分算子 ············ 193
习题 ············ 196
第 6 章 群代数 ············ 201
6.1 群代数表示 ············ 201
6.2 Plancherel 定理 ············ 212
6.3 Fourier 代数 ············ 216
习题 ············ 221
第 7 章 K 理论 ············ 223
7.1 拓扑 K 理论 ············ 223
7.2 C^* 代数的 K 群 ············ 231
7.3 C^* 代数的解析 K 同调群 ············ 234
7.4 KK 理论 ············ 236
参考文献 ············ 240
索引 ············ 245
《现代数学基础丛书》已出版书目 ············ 248

第1章　拓　扑　群

本章讲解拓扑群的基本操作、同态、子群、商空间、反向极限. 最简单的拓扑群是实数 $\mathbb{R}$ 和 2×2 矩阵群

$$GL_2\mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}.$$

第一个商空间的例子便是 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. 反向极限的例子是 $\varprojlim_n \mathbb{Z}/P^n\mathbb{Z}$.

1.1　群和拓扑空间

为了阅读方便, 我们先简述一下群和拓扑空间的内容.

一个群是一个集合与一个在其中定义的二元运算 $(G, \cdot)$, 它满足下面三条公理:

(1) $(ab)c = a(bc), \forall a,\ b,\ c\ \in G$;

(2) 存在单位元 e, 使得 $ea = ae = a, \forall a \in G$;

(3) 对任意 $a \in G$, 存在 $a^{-1} \in G$, 使得 $a^{-1}a = aa^{-1} = e$. 若二元运算是对称的, 即 $ab = ba$, 则 G 称为交换群或 Abel 群.

设 N 是 G 的一个子集, 若 N 对 G 中的运算构成群, 则称 N 为 G 的子群. 若一个子群 N 满足

$$a^{-1}Na = \{a^{-1}na|\ \forall n \in N\} = N, \quad Va \in G,$$

则称 N 为 G 的正规子群, 记为 $N \triangleleft G$. 这时我们可以作 G 模 N 的商群, 这是由 G 模下述等价关系 ρ 而得到的等价类构成的群:

$$a \overset{\rho}{\sim} b \Leftrightarrow ab^{-1} \in N.$$

事实上, 它就是 G 关于 N 的所有陪集所组成的群, 记为 G/N.

设 G_1, G_2 皆为群, e_1, e_2 分别为 G_1, G_2 的单位元, 若一个映射

$$\begin{aligned} \varphi : G_1 &\to G_2, \\ a &\mapsto \varphi(a), \end{aligned}$$

满足

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \forall a,\ b \in G_1,$$

则我们称 φ 是 G_1 到 G_2 的同态, 同态的核是

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in G_1 | \varphi(a) = e_2\}.$$

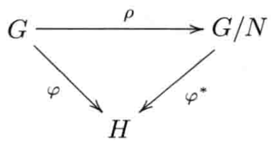
如果 $\mathrm{Ker}\varphi = \{e_1\}$, 则称 φ 是单的. φ 的像集是

$$\mathrm{Im}\varphi = \{b \in G_2 |\ 存在\ a \in G_1,\ 使\ b = \varphi(a)\}.$$

若 $\mathrm{Im}\varphi = G_2$, 则 φ 称为满的. 当同态 φ 既单又满时, 则称 φ 是同构, 这时我们说 G_1 和 G_2 同构, 记为 $G_1 \cong G_2$. 一般地, 总有

$$G_1/\mathrm{Ker}\varphi \cong \mathrm{Im}\varphi.$$

设 N 为 G 的正规子群, 则我们有同态映射 $\rho : G \to G/N$. 设另有一同态: $G \to H$, 且 $N \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$, 则必存在同态 $\varphi^* : G/N \to H$, 使得 $\varphi = \varphi^* \circ \rho$, 也就是说, 使得下图



是交换图, 这称为商群的万有性质.

设 I 为一指标集合, G_i, $i \in I$ 全是群, 则我们可以作这些群的乘积

$$G = \prod_{i \in I} G_i,$$

其元素形式为 $a = (a_i)_{i \in I}$, 其中 $a_i \in G_i$, G 中积运算和求逆运算都按分量进行, 以 π 记射影同态

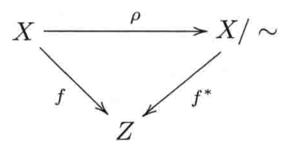
$$\pi : G \to G_i,$$
$$a \mapsto a_i.$$

下面讨论拓扑空间. 我们在一个集合 X 中引入开集的概念, 它满足公理: $X, \varnothing$ 是开集; 任意个开集的并是开集; 有限个开集的交是开集. 这样就赋予 X 一个拓扑, 它使 X 成为拓扑空间. 我们定义闭集为开集的补集. 设 $S \subset X$, 则包含 S 的最小闭集称为 S 的闭包, 记为 $\overline{S}$. 在同一集合中可以有不同的拓扑, 它们分别成为不同的拓扑空间. 设 X 有不同的拓扑 T_1 和 T_2. 我们说 T_1 比 T_2 强, 是指 X 中一个集合如在 T_2 下是开集, 则在 T_1 下也是开集. 对任一集合 X, 最强的拓扑是离散拓扑, 这种拓扑规定 X 的任一子集合都是开集. 最弱的拓扑是平凡拓扑, 它规定只有 X 和 $\varnothing$ 是开集.

设 X_1, X_2 是两个拓扑空间, 一个映射 $f: X_1 \to X_2$ 称为连续的, 是指若 U 是 X_2 的开 (闭) 集, 则 U 在 f 下的原像 $f^{-1}(U)$ 是 X_1 的开 (闭) 集. 如果 f 将 X_1 的任一开 (闭) 集都映为 X_2 中开 (闭) 集, 则称 f 为开 (闭) 映射. 如果 f 是一个一一对应的连续映射, 则我们可以定义 $f^{-1}: X_2 \to X_1$. 如果 f^{-1} 也是连续的, 则 X_1 与 X_2 有完全相同的拓扑结构, 我们称 X_1 与 X_2 同胚, 称 f 为同胚映射.

对 X 的任一子集合 Y, 我们有诱导拓扑使 Y 成为拓扑空间: U 是 Y 的开集 $\Leftrightarrow U = V \bigcap Y$, 这里 V 是 X 的开集. 这时 Y 称为 X 的子空间. 显然, 此时嵌入映射 $j: Y \to X$ 是连续的.

设 $\sim$ 是拓扑空间一个等价关系, 则我们可以作商集合 $X/\sim$, 即 X 对于 $\sim$ 的等价类集合, 进一步可在 $X/\sim$ 中得到诱导拓扑, 这是使映射 $\rho: X \to X/\sim$ 连续的最强的拓扑, 即 A 是 $X/\sim$ 中开集, 当且仅当 $\rho^{-1}(A)$ 是 X 中开集. 商集合被赋予这种诱导拓扑后就称为商空间, 它具有万有性质: 设 $f: X \to Z$ 连续, 且当 $a \sim b$ 时, 有 $f(a) = f(b)$, 则存在唯一连续映射 $f^*: X/\sim \to Z$, 使得 $f = f^* \circ \rho$, 换句话说, 即使下图



为交换图.

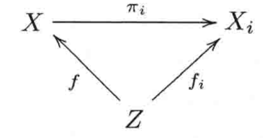
设 I 是任意指标集, $\{X_i\}_{i\in I}$ 是一组拓扑空间. 我们可作这些 X_i 的乘积

$$X = \prod_{i\in I} X_i,$$

并赋予拓扑: X 的开集为下列集合中元素的并集

$$\mathscr{F} = \left\{ A = \prod_{i\in I} A_i \middle| A_i \text{ 是} X_i \text{ 的开集, 且除了有限个 } i \text{ 外}, A_i = X_i, \forall\, i \in I \right\},$$

则此拓扑称为乘积拓扑, X 为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的拓扑积. 投影映射 $\pi_i: X \to X_i$ 是连续映射, 也是开映射. X 也具有万有性质: 设 $f_i: Z \to X_i$ 是连续映射, $\forall i \in I$, 则存在唯一的连续映射 $f: Z \to X$, 使得对每个 $i \in I$, 下图



都是交换图.

设 X 是一个拓扑空间. 如果有一个开集集合 $\{B_i\}_{i\in I}$, X 的任何开集都可写为 $\bigcup\limits_{i\in J} B_i$, $J \subseteq I$, 则称 $\{B_i\}_{i\in I}$ 为 X 的开拓扑基. 在这个情况下如果集合 I 是可数的,

则称拓扑空间 X 为第二可数拓扑空间. 任一个开集集合 $\{B_i\}_{i\in I}$ 是开拓扑基当且仅当: (1) $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = X$; (2) $\forall i,\ j \in I$, 必存在 $K \subseteq I$, 使得 $B_i \cap B_j = \bigcup\limits_{k\in K} B_k$. 因此, 从拓扑基出发也可定义拓扑空间, 只需定义形如 $\bigcup\limits_{i\in J} B_i,\ J \subseteq I$ 的集合为开集就可以了.

仍设 X 是一个拓扑空间, $A \subseteq X$. 一个点 $a \in A$ 称为 A 的内点, 如果存在 X 的一个开集 N, 使得 $a \in N \subset A$. A 的所有内点组成的集合称为 A 的内集. 称 A 是点 $x \in X$ 的邻域, 是指 x 为 A 的内点. 因此, 任一个包含 x 的开集都是 x 的邻域, 它称为 x 的开邻域. x 的一个邻域集合 $\mathscr{F}(x)$ 如果有以下性质: 任一 x 的邻域皆包含 $\mathscr{F}(x)$ 中一个元素, 则我们称 $\mathscr{F}(x)$ 为 x 的基本邻域组. 特别地, 当 $\mathscr{F}(x)$ 是由 x 的开邻域组成的时, 我们称它为 x 的基本开邻域组. 如果每个 $x \in X$ 都给定一个基本开邻域组 $\mathscr{F}(x)$, 则

$$\{\mathscr{F}(x) | x \in X\}$$

构成 X 的开拓扑基. 因此从给定每个点的开邻域组出发也可以定义拓扑空间.

众所周知, 距离空间中每点都存在球形基本邻域组, 因此距离空间是拓扑空间.

下面讨论分离性公理, 仍设 X 为拓扑空间.

称 X 为 T_0 空间, 如果对 X 中任意不同的两点 a 和 b, 存在一个开集包含两点之中的一点;

称 X 为 T_1 空间, 如果对 X 中任意不同的两点 a 和 b, 存在 a 的一个邻域与 b 无交.

称 X 为 T_2 空间, 或 Hausdorff 空间, 若对 X 中任意不同两点 a 和 b, 存在 a 的邻域 U 和 b 的邻域 V, 使得 $U \cap V = \varnothing$.

称 X 为 T_3 空间或正则空间, 若 X 是 T_0 空间, 且对 X 中一闭集 A 及一点 $b \notin A$, 存在两个开集 U 和 V, 使得 $b \in U,\ A \subseteq V,\ U \bigcap V = \varnothing$.

命题 1.1.1　正则空间必是 Hausdorff 空间.

证明　设 a, b 是正则空间 X 中不同的两点. 因 X 是 T_0 空间, 故存在一开集 U 包含其中一点, 不妨设 $a \in U$, 而 $b \notin U$, 则 $b \in X\backslash U$. 由 X 的正则性, 对点 a 及不包含 a 的闭集 $X\backslash U$, 存在两个不交开集 V 和 W, 使得 $a \in V,\ X\backslash U \subseteq W$. V 和 W 即为分别包含 a 和 b 的两个不相交开集, 即 X 是 Hausdorff 空间. □

一个拓扑空间 X 称为紧的, 如果从 X 的每个开覆盖中可选出有限子集成为 X 的覆盖. 当然紧性也可以用上述的对偶, 即闭集的有限交性质来描述.

在研究实数理论时, 有列紧性的概念, 将其推广到拓扑空间, 一个空间称为是列紧的, 如果它的每个无穷点集 A 都有极限点 (即在该点的每个邻域中都包含 A 中无穷个点). 可以证明, 紧集合必是列紧的 (习题). 反之则不然.

下述命题请读者自己证明.

命题 1.1.2 (1) 紧空间的任一闭子空间是紧的;

(2) Hausdorff 空间的紧子空间是闭的;

(3) 紧空间在连续同态下的像是紧的;

(4) 紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射是闭的;

(5) 一个拓扑空间中有限多个紧子空间的并是紧的. □

例 1.1.1 (1) 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^1$ 的连续映射. 由连续定义可知, 对于 $a \in \mathbb{R}^1$, 由等式 $f(x_1, \cdots, x_n) = \alpha$ 或不等式 $f(x_1, \cdots, x_n) \geqslant \alpha$ (或 $\leqslant \alpha$) 所定义的 $\mathbb{R}^n$ 的子集是闭集. 如果它也是有界集, 则就是紧的.

特别地, n 维球面 $(n \geqslant 1)$

$$S^n = \left\{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle\| \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

是紧的.

(2) n 维实射影空间 P^n 是 S^n 的同态像, 故是紧的.

(3) n 维环面 $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中有界闭集, 故为紧集.

(4) 正交群 O_n 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中有界闭集. 设 $A = (\alpha_{ij}) \in O_n$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{i,k}, \quad \forall 1 \leqslant j, k \leqslant n,$$

故它是紧的.

关于紧空间的一个重要定理:

命题 1.1.3(Тихонов) $X, X_i, i \in I$ 都是拓扑空间, 且 $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$, 则 X 是紧空间, 当且仅当对一切 $i \in I$, X_i 是紧空间.

见文献 [Dug 66] 第 XI 章第 1 节定理 1.4(4).

设 C 是拓扑空间 X 的紧子集, 我们称包含 C 的开集为 C 的开邻域.

命题 1.1.4 X 是 Hausdorff 空间, 则任意两个不相交紧子集必有不相交的开邻域.

证明 设 A, B 是 X 的两个无交紧子集. 对任意 $a \in A$, $b \in B$, 存在两个开集 $V_{a,b}$ 和 U_b, 使得 $a \in V_{a,b}$, $b \in U_b$, $V_{a,b} \bigcap U_b = \varnothing$. $B \subseteq \bigcup\limits_{b \in B} U_b$, 由紧性, 存在有限个 $U_{b_1}, U_{b_2}, \cdots, U_{b_n}$, 使得 $B \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{b_i} = U_a$. 记 $V_a = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_{a,b_i}$, 则 $U_a \bigcap V_a = \varnothing$. 令 a 在 A 中变动, 有 $A \subseteq \bigcup\limits_{a \in A} V_a$. 由 A 的紧性, 存在有限个 $V_{a_1}, \cdots, V_{a_m}$ 覆盖 A, 取 $V = \bigcup\limits_{i=1}^{m} V_{a_i}$, $U = \bigcap\limits_{i=1}^{m} U_{a_i}$, 则 $A \subseteq V$, $B \subseteq U$, 且 $U \bigcap V = \varnothing$. □

拓扑空间 X 称为局部紧的, 是指 X 中每个点都有一个紧邻域.

命题 1.1.5　(1) 局部紧空间的闭子空间是局部紧的;

(2) 设 X 是局部紧空间, $f: X \to Y$ 是连续、开且满的映射, 则 Y 是局部紧的;

(3) $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ 是拓扑空间的乘积, $X_i \neq \varnothing, \forall i \in I$, 则 X 是局部紧当且仅当对于每个 $i \in I$, X_i 都是局部紧的, 且除有限个 i 外, X_i 是紧的.

证明　(1) 设 X 为局部紧空间, Y 是 X 中闭子空间, $y \in Y \subset X$, 则在 X 中存在 y 的紧邻域 N. 由定义, $Y \cap N$ 是 N 的闭集, 显然它非空. 由命题 1.1.2(1) 可知 $Y \cap N$ 是紧的, 它就是 y 在 Y 中的紧邻域.

(2) 对任一 $y \in Y$, 因 f 是满射, 故有 $x \in X$, 使 $f(x) = y$. 设 N 是 x 在 X 中紧邻域, 则 $f(N)$ 是 Y 中紧集 (命题 1.1.2(3)). 又 f 是开的, 且 $y \in f(N)$, 因此 $f(N)$ 是 y 的紧邻域.

(3) 设 X_i 是局部紧的 $(\forall i \in I)$, 且除了有限个 X_i 外都是紧的, 则对任意 $x = (x_i) \in X$, 对每个 i, 存在 $N_i \subseteq X_i$, 它是 x_i 的紧邻域, 且对几乎所有的 i, 有 $N_i = X_i$. 由命题 1.1.3 可知, $\prod\limits_{i \in I} N_i$ 是 x 的紧邻域.

反之, 设 $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ 是局部紧的, $\pi_i: X \to X_i$ 是连续、开且映上的, 由 (2) 可知每个 X_i 是局部紧的. 设 $x \in X$ 有紧邻域 N, 则依乘积拓扑定义可知除有限个 i 以外. 都有 $\pi_i(N) = X_i$, 因此除有限个外, X_i 都是紧的. □

命题 1.1.6　设 X_i 是局部紧的 Hausdorff 空间, Y 是 X 的紧子集, U 是 Y 的开邻域, 则存在开集 V, 其闭包为紧集, 且 $Y \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

证明　先假定 X 是紧空间. 设 Y 是 X 的紧子集, $Y \subseteq U$, U 是开集, 则 $X \backslash U$ 为闭集, 故为紧集. 由命题 1.1.4, 可知存在两个不交开集 W_1 和 W_2, 使得 $Y \subseteq W_1$, $X \backslash U \subseteq W_2$, 于是有 $W_1 \subseteq X \backslash W_2 \subseteq U$. 注意到 $X \backslash W_2$ 是闭集, 因此 $\overline{W}_1 \subseteq X \backslash W_2 \subseteq U$. 令 $V = W_1$, 则 $\overline{V} = \overline{W}_1$ 是紧集, 且有 $Y \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

现在设 X 是局部紧的. Y 是 X 的紧子集, U 是 Y 的开邻域, 对每个 $x \in Y$, 存在 x 在 X 中的紧邻域 U_x, $\bigcup\limits_{x \in Y} U_x \supseteq Y$. 由于 Y 是紧的, 故存在 $x_1, \cdots, x_n \in Y$, 使得 $W = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{x_i} \supseteq Y$. 由命题 1.1.2, W 紧, 于是 $U \cap W$ 是 Y 在紧空间 W 中的开邻域, 以上论述即说明存在 Y 的开邻域 V, $\overline{V}$ 紧, 且有 $Y \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U \cap W \subseteq U$. □

命题 1.1.7　设 X 是局部紧的 Hausdorff 拓扑空间, 则 X 的任一开子集都是局部紧的.

证明　设 Y 是 X 的开子集, 对任一 $x \in Y$, $\{x\}$ 是闭集, 因而是局部紧的. $\{x\}$ 中 x 的紧邻域只能是 $\{x\}$, 因而 $\{x\}$ 是紧集. Y 是 $\{x\}$ 的开邻域, 由命题 1.6 可知存在 x 的紧邻域 $V \subseteq Y$. □

我们还会用到以下概念.

定义 1.1.1 称拓扑空间 X 是 σ-紧的, 如果存在可数个紧子空间 K_n, 使得 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{n} K_n$.

称拓扑空间 X 是可数紧的, 如果从 X 的每个可数开覆盖中可以选出有限个元素组成 X 的覆盖.

称拓扑空间 X 为局部可数紧, 如果 X 中每个点有开邻域, 其闭包为可数紧子空间.

例 1.1.2 (1) 任何紧空间是局部紧的.

(2) 任何离散空间都是局部紧的, 对离散空间中任一点而言, 该点本身就是它的紧邻域.

(3) $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 是局部紧的, 然而有理数 $\mathbb{Q}$ 却不是局部紧的, 现在我们来证明这点.

对任意 $r \in \mathbb{Q}$, r 的任一邻域 (对适当的 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$) 包含 $(r-\varepsilon_1, r+\varepsilon_2)$. 在此区间中必有一个无理数 α, 它可以用有理数无限逼近, 即 $\mathbb{Q}$ 中存在无穷点列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, 它们满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha, \alpha \notin \mathbb{Q}$. 这说明 r 的任何邻域都不是列紧的, 从而非紧的.

1.2 拓 扑 群

定义 1.2.1 集合 G 称为拓扑群, 如果 G 是个群, 又是拓扑空间, 并且这两种结构是相容的. 也就是说, 群的乘法运算

$$\mu : G \times G \to G$$

和求逆运算

$$\nu : G \to G$$

是连续映射. 常记 $\mu(x,y)$ 为 xy, $\nu(x)$ 为 x^{-1}.

例 1.2.1 (1) $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 相对于加法和通常的距离拓扑是拓扑群, 它们分别记为 $(\mathbb{R},+)$ 和 $(\mathbb{C},+)$.

(2) 类似地, $(\mathbb{R}^*,\cdot)$, $(\mathbb{R}_+^\times,\cdot)$ 和 $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ 都是拓扑群.

(3) $\mathbb{R}^n$ 相对于通常加法和距离拓扑是拓扑群.

(4) 任一抽象群, 取离散拓扑就成为拓扑群.

(5) G 是一拓扑群, 则 G 的任意一个子群相对于子空间的诱导拓扑是拓扑群. 这样 $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ 都是拓扑群, 特别 $\mathbb{Z}$ 的子空间拓扑是离散拓扑.

(6) 1 维球面 $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$, $S = \{x \mid |x| = 1\}$, 相对于乘法及 $\mathbb{C}^*$ 的子空间拓扑是拓扑群.

(7) 在 $\mathbb{Q}$ 中可引入 p-adic 拓扑, 这是由 p-adic 赋值引入的距离拓扑. 设 p 为一素数, 对 $\mathbb{Q}$ 中任一非零元 $x = p^r m/n$, $(mn, p) = 1$, 定义 x 的 p-adic 赋值为 $|x|_p = p^{-r}$, 且 $|0|_p = 0$. 不难看出, 定义 $d(x, y) = |x - y|_p$, 则得到距离拓扑, 我们称它为 p-adic 拓扑. $\mathbb{Q}$ 对加法 (或乘法) 和 p-adic 拓扑是拓扑群.

(8) 一般线性群 $GL_n(\mathbb{R})$ 由一切元素在 $\mathbb{R}$ 中的 $n \times n$ 非奇异矩阵组成, 它们在矩阵乘法下构成群. 将每个矩阵视为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的元素, 则得到子空间拓扑, 不难证明矩阵乘法对此拓扑是连续的, 因此 $GL_n(\mathbb{R})$ 是拓扑群.

类似地, $GL_n(\mathbb{C})$ 等也是拓扑群.

(9) 由 (5) 可知 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群都是拓扑群, 其中有

特殊线性群: $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$.

正交群: 设 H 为 $GL_n(\mathbb{R})$ 中正定对称矩阵,

$$O_n(\mathbb{R}, H) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | AHA^t = H\}$$

是正交群, 通常取 H 为单位矩阵 I, 这时正交群简记为 $O_n(\mathbb{R})$ 或 O_n.

辛群: H 为 $GL_{2n}(\mathbb{R})$ 中反对称矩阵,

$$Sp_{2n}(\mathbb{R}, H) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) | AHA^t = H\}$$

是辛群. 通常取 H 为

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I 为 n 阶单位矩阵.

注　以上各例绝大多数是局部紧拓扑群, 例如我们可以说明 $GL_n(\mathbb{R})$ 是局部紧群, 从下文中我们很快知道, 只要找到单位元的紧邻域即可. 我们作

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1+\varepsilon_n \end{pmatrix} \middle| \varepsilon_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right\},$$

E 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中有限闭集, 因而是紧集且是 I 的紧邻域.

定义 1.2.2　设 G, H 都是拓扑群. 若映射 $\varphi : G \to H$ 是群同态又是连续映射, 则 φ 称为连续同态. 若 φ 的逆映射存在, 而且也是连续同态, 则 φ 称为一个同构, 这时, 我们称两个拓扑群是互相同构的.

例 1.2.2　(1)$(\mathbb{R}, +) \cong (\mathbb{R}_+^\times, \cdot)$, 同构为

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\times,$$

$$x \mapsto \exp x.$$

(2) 二阶正交群 $SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$ 同构于 $S^1 \subseteq \mathbb{C}^*$, 同构为

$$\varphi : \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mapsto \cos\theta + i\sin\theta.$$

(3) 设 $(\mathbb{R}, d)$ 表示 $\mathbb{R}$ 以离散拓扑所成的拓扑群, 则虽然

$$\varphi : (\mathbb{R},d) \to (\mathbb{R}, +),$$
$$x \mapsto x$$

是连续映射, 但其逆不连续. 因此 $(\mathbb{R}, d)$ 与 $(\mathbb{R}, +)$ 不同构.

定义 1.2.3 一个拓扑空间 X, 若对任意 $a, b \in X$, 都存在 X 的同胚将 a 映为 b, 则称 X 是齐性空间.

命题 1.2.1 拓扑群必是齐性空间.

证明 设 G 是拓扑群, 考虑 G 到自身的映射: 右乘映射. 对任一 $s \in G$, 定义

$$r_s : G \to G,$$
$$x \mapsto xs.$$

记

$$\varphi_1 : G \to G \times G,$$
$$x \mapsto (x, s),$$
$$\varphi_2 : G \times G \to G,$$
$$(x, s) \mapsto xs,$$

则 $r_s = \varphi_2 \circ \varphi_1$, 显然 φ_1 和 φ_2 都是连续映射, 因此 r_s 是连续的. 又有 $r_{s^{-1}} = (r_s)^{-1}$ 也连续, 于是 r_s 是同胚, 对任给 $a, b \in G$, $r_{a^{-1}b}(a) = b$. □

注 同理, 左乘映射 $ls : x \mapsto sx$ 也是同胚.

设 A, B 为 G 的子集, 记

$$AB = \{ab | a \in A, b \in B\},$$
$$A^{-1} = \{a^{-1} | a \in A\}.$$

命题 1.2.2 设 G 是拓扑群, A, B 是 G 的子集, $x \in G$, 则

(1) A 是开 (闭) 集 $\Rightarrow$ Ax 和 xA 是开 (闭) 集;

(2) A 是开集 $\Rightarrow$ AB 和 BA 都是开集;

(3) A 是闭集, B 是有限集 $\Rightarrow$ AB 和 BA 都是闭集;

(4) A, B 都是紧集 $\Rightarrow AB$ 是紧集.

证明　(1) 因 r_x 和 l_x 都是同胚, 故它们既是开映射又是闭映射.

(2) $AB = \bigcup\limits_{x\in B} Ax$ 是开集之并, 故为开集. 同理, BA 也是开集.

(3) $AB = \bigcup\limits_{x\in B} Ax$ 是有限个闭集之并, 故为闭集. 同理, BA 也是闭集.

(4) 由命题 1.1.3, $A\times B$ 是 $G\times G$ 的紧子集, 乘法 $\mu : G\times G\to G$ 是连续的. 由命题 1.1.2(3), 可知 $AB=\mu(A\times B)$ 是紧子集. □

1.3　拓扑群的邻域组

给定一个空间的拓扑的最方便做法是确定出基本邻域组, 即拓扑基. 我们知道, 任一拓扑群都是齐性空间, 设 G 为拓扑群, e 为其单位元, 右乘同胚 r_x 将 e 映为 x. 如果 U 是包含 e 的开邻域, 则 Ux 是含有 x 的开邻域. 故我们只要确定了单位元 e 的基本开邻域组 $\mathscr{F}$, 就确定了 G 的基本开邻域组. 我们又称 $\mathscr{F}$ 为 e 的开基.

命题 1.3.1　设 $\mathscr{F}$ 为拓扑群 G 单位元的任一组开基, 则有

(1) 对 $U,V\in\mathscr{F}$, 存在 $W\in\mathscr{F}$, 使得 $W\subseteq U\cap V$;

(2) 设 $a\in U\in\mathscr{F}$, 则存在 $V\in\mathscr{F}$, 使得 $Va\subseteq U$;

(3) 设 $U\in\mathscr{F}$, 则存在 $V\in\mathscr{F}$, 使得 $V^{-1}V\subseteq U$;

(4) 设 $U\in\mathscr{F}$, $x\in G$, 则存在 $V\in\mathscr{F}$, 使得 $x^{-1}Vx\subseteq U$;

(5) 设 $U\in\mathscr{F}$, 则存在 $V\in\mathscr{F}$, 使得 $V^{-1}\subseteq U$;

(6) 设 $U\in\mathscr{F}$, 则存在 $W\in\mathscr{F}$, 使得 $W^2=W\cdot W\subseteq U$.

证明　(1) $U\cap V$ 是含有 e 的开集, 是 e 的开邻域, 故必包含 $\mathscr{F}$ 中一个元素 W.

(2) Ua^{-1} 是包含 e 的开集, 因此包含一个 $\mathscr{F}$ 中元素 V, 故 $Va\subseteq U$.

(3) 考虑 $\varphi : G\times G\to G$, $(a,b)\mapsto a^{-1}b$, 它是连续映射, U 为开集, 故 $\varphi^{-1}U$ 为 $G\times G$ 中开集, 且 $(e,e)\in\varphi^{-1}U$. 因此存在 $A\in\mathscr{F}$, $B\in\mathscr{F}$, 使得 $A\times B\subseteq\varphi^{-1}U$. 由 (1), 存在 $V\in\mathscr{F}$, 使得 $V\subseteq A\cap B$, 所以 $V\times V\subseteq\varphi^{-1}U$, 即 $V^{-1}V\subseteq U$.

(4) 考虑 $\varphi : G\to G$, $g\mapsto x^{-1}gx$. 它是连续映射, U 为开集, 故 $\varphi^{-1}U$ 为开集, 且 $e\in\varphi^{-1}U$. 因此存在 $V\in\mathscr{F}$, $V\subseteq\varphi^{-1}U$, 即 $x^{-1}Vx\subseteq U$.

(5) 由 (3) 有 $V\in\mathscr{F}$, 使 $V^{-1}V\subseteq U$, 注意到 $e\in V$, 故 $V^{-1}\subseteq V^{-1}V\subseteq U$.

(6) 考虑 $\varphi : G\times G\to G$, $(a,b)\mapsto ab$, 它是连续映射, $\varphi^{-1}U$ 是包含 (e,e) 的开集, 故有 $A\in\mathscr{F}$, $B\in\mathscr{F}$, $A\times B\subseteq\varphi^{-1}U$. 取 $W\in\mathscr{F}$, $W\subseteq A\cap B$, 则有 $W\times W\subseteq\varphi^{-1}U$, 即 $W^2\subseteq U$. □

事实上, 上述性质完全决定了拓扑群的基. 确切地说, 有

命题 1.3.2　设 G 是一抽象群, $\mathscr{F}$ 是 G 的一组非空子集, 每个子集都含有 e. 又设 $\mathscr{F}$ 满足命题 1.3.1 中性质 (1)~(4), 则 G 中存在的唯一拓扑, 它以 $\mathscr{F}$ 为 e 的

基本开邻域组, 使 G 为拓扑群.

证明 令

$$\mathscr{B}=\{Ug|U\in\mathscr{F},g\in G\}.$$

只要能够证明 $\mathscr{B}$ 是 G 的拓扑基, 且使 G 成为拓扑群就行了, 唯一性是显然的.

首先, 显然有 $\bigcup\limits_{\substack{g\in G\\U\in\mathscr{F}}}Ug=G$.

其次, 对 $\mathscr{B}$ 中任意两元素 Ua 和 Vb, 其中 U, $V\in\mathscr{F}$, a, $b\in G$, 我们来证明 $Ua\cap Vb$ 是 $\mathscr{B}$ 中一些元素之并. 为此只需证明, 对任意 $c\in Ua\cap Vb$, 存在 $\mathscr{F}$ 中一个元素 W, 使得 $Wc\subseteq Ua\cap Vb$. 设 $c=ua=vb$, $u\in U$, $v\in V$. 由命题 1.3.1 中性质 (2), 存在 U_1, $V_1\in\mathscr{F}$, 使得 $U_1u\subseteq U$, $V_1v\subseteq V$. 于是, $U_1c=U_1ua\subseteq Ua$, $V_1c=V_1vb\subseteq Vb$. 由命题 1.3.1 中性质 (1), 存在 $W\in\mathscr{F}$, 使得 $W\subseteq U_1\cap V_1$. 故有 $Wc\subseteq Ua\cap Vb$. 当 $a=b=e$ 时, 说明 $\mathscr{F}$ 是 e 的开基.

下面我们证明 G 在此拓扑下是一拓扑群. 只需说明 $\varphi:(b,c)\mapsto b^{-1}c$ 是连续映射, 即对每个 $Ua\in\mathscr{B}$, 证明 $\varphi^{-1}(Ua)$ 是 $G\times G$ 中开集. 设 $b^{-1}c=ua$, $u\in U$. 由命题 1.3.1 中性质 (2), 存在 $V\in\mathscr{F}$, 使 $Vu\subseteq U$. 由性质 (4), 存在 $W\in\mathscr{F}$, 使 $b^{-1}Wb\subseteq V$. 又由命题 1.3.1 中性质 (3), 存在 $Z\in\mathscr{F}$, 使 $Z^{-1}Z\subseteq W$, 则 $b^{-1}Z^{-1}Zbua\subseteq Ua$, 即 $(Zb)^{-1}(Zc)\subseteq Ua$. □

当 $\mathscr{F}$ 全部由子群组成时, 条件还可简化.

命题 1.3.3 设 G 是一抽象群, $\mathscr{F}$ 是 G 的一组子群, 满足

(1) 若 U, $V\in\mathscr{F}$, 则存在 $W\in\mathscr{F}$, 使得 $W\subseteq U\cap V$;

(2) 若 $U\in\mathscr{F}$, $x\in G$, 则存在 $V\in\mathscr{F}$, 使得 $x^{-1}Vx\subseteq U$, 则 G 是以 $\mathscr{F}$ 为 e 的开基的拓扑群.

证明 注意到 $\mathscr{F}$ 中元素皆为群, 故 $U\in\mathscr{F}$, 有 $U=U^{-1}$, 且如果 $a\in U$, 有 $aU=U$. 为满足命题 1.3.1 中的 (2), (3), 只要取 $V=U$. 由命题 1.3.2, G 是拓扑群, $\mathscr{F}$ 为 e 的开基. □

例 1.3.1 (1) 考虑 $\mathbb{Q}$ 对加法及 p-adic 拓扑所构成的拓扑群, 对 $\forall t\in\mathbb{Z}$, 定义

$$U_t=\left\{\frac{mp^t}{n}:p\nmid mn\right\},$$

则有正规子群列

$$\cdots\supseteq U_{-1}\supseteq U_0\supseteq U_1\supseteq\cdots,$$

其中元素构成了加法群单位元 0 的开基.

(2) 对 $\mathbb{Q}^*$ 在 p-adic 拓扑下构成的乘法群, 令 $V_t=1+U_1$, 其中 U_t 同 (1), 则

$$\{V_t|t\in\mathbb{Z}\}$$

构成单位元 1 的基本开邻域组.

(3) 对任一群 G, 可取其一切有限指数子群为 e 的基本开邻域组.

(4) 对任一群 G, 定义 G 的换位子群为 $G' = G^{(1)} =$ 由 $\{aba^{-1}b^{-1}|a, b \in G\}$ 所生成的群, 并归纳定义

$$G^{(t)} = G^{(t-1)'}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}^+,$$

则得到正规子群降列

$$G \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots.$$

它给出了 G 中单位元的开邻域基.

(5)R 是任意包有 1 的交换环, $R[[x]]$ 为 R 上形式幂级数环. 定义

$$U_n = x^n R[[x]],$$

则 Abel 群降列

$$U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$$

是零元素的开邻域基. $(R[[x]], +)$ 在此拓扑下是拓扑群.

为了证明一个映射是同胚, 需要证明这个映射是连续开映射. 下面给出判定映射为开映射的条件. 先证明一个重要命题.

命题 1.3.4(Baire)　设 X 是局部可数紧正则空间, 则 X 内不存在可数个闭子集 $\{F_n\}$, 使得每个 F_n 没有内点且

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

证明　设有 $\{F_n\}$ 满足命题中条件, 以 D_n 记 F_n 的补集. X 是局部可数紧的, 则可选一非空开子集 U_0, 使得 $\overline{U}_0$ 是可数紧集. 现在我们证明: 一定存在非空开集 U_1, 使得 $\overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_0 \cap D_1$. 因 F_1 无内点, 故有 $U_0 \subsetneq F_1$. 由 X 的正则性, 对 U_0 中不属于 F_1 的点 x, 必存在不相交开集 V 和 W, 使得 $x \in V$, $F_1 \subseteq W$, $V \subseteq X \backslash W$, 后者是闭集, 故 $\overline{V} \subseteq X \backslash W \subseteq D_1$. 又因 U_0 开, 存在开集 V', 使得 $x \in V' \subseteq U_0$, 则 $\overline{V}' \subseteq \overline{U}_0$. 取 $U_1 = V \cap V'$, 则 U_1 非空且 $\overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_0 \cap D_1$. 同样推理可得非空开集 $U_2, \cdots, U_n, \cdots$ 满足 $\overline{U}_2 \subseteq \overline{U}_1 \cap D_2, \cdots, \overline{U}_n \subseteq \overline{U}_{n-1} \cap D_n, \cdots$. 由于 U_0 是可数紧的, 且 $\overline{U}_0 \supseteq \overline{U}_1 \supseteq \overline{U}_2 \cdots$, 因此 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \overline{U}_n \neq \varnothing$. 但 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \overline{U}_n \subseteq \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n$, 于是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D_n \neq \varnothing$, 这与 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ 矛盾. □

注　上面命题对 X 是局部紧 Hausdorff 空间的情形也对.

命题 1.3.5　设 G 是正则局部紧 σ-紧群, H 是正则局部可数紧群. 若 $\varphi : G \to H$ 是连续满同态, 则 φ 是开映射.

证明 设

$\mathscr{U}=\{U|U$是G的单位元开邻域,且$U=U^{-1}\}$,

$\mathscr{V}=\{V|V$是H的单位元开邻域$\}$.

由命题 1.3.1(3), 可知只需证明: 对一切 $U\in\mathscr{U}$, $\varphi(U)$ 是 H 的开集, 如果 $\varphi(U)$ 包含一个 $V\in\mathscr{V}$, 则 $\varphi(U)=V\cdot\varphi(U)$, 那么由命题 1.2.2(2) 可知 $\varphi(U)$ 是开集. 故我们只需证明对一切 $U\in\mathscr{U}$, 必存在 $V\in\mathscr{V}$ 使得 $V\subseteq\varphi(U)$.

由命题 1.3.1 可知存在单位元开邻域 W_1, 使得 $W_1^{-1}W_1\subseteq U$. 由于 G 是局部紧的, 再由命题 1.1.7 可知 W_1 也是局部紧. 因此存在单位元的闭紧邻域 $W\subseteq W_1$, 所以 $W^{-1}W\subseteq U$. G 又是 σ-紧的, 可设 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$, $K_n=\bigcup\limits_{x\in K_n}xW$, K_n 紧, 于是 K_n 是有限个 xW 的并. 因此存在可数集 $\{x_n\}$, 使 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}x_nW$. φ 是满射, 故 $H=\varphi(G)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(x_n)\varphi(W)$. W 紧, 所以 $\varphi(W)$ 也紧, H 正则, 故 $\varphi(W)$ 为闭集. 如果 $\varphi(W)$ 无内点, 则每个 $\varphi(x_n)\varphi(W)$ 亦然, 这与 Baire 引理矛盾. 因此 $\varphi(W)$ 含有非空开集 V. 取 $y\in V$, 则存在 $x\in W$, 使得 $\varphi(x)=y$. 于是由 $x^{-1}W\subseteq U$ 可得

$$\varphi(U)\supseteq\varphi(x^{-1}W)=\varphi(x)^{-1}\varphi(W)\supseteq y^{-1}V.$$

显然 $y^{-1}V\in\mathscr{V}$. □.

1.4 子群和商群

在 1.2 节中我们已经给出了拓扑群子群的定义并看到了一些例子. 现在我们来研究有关实数加法群子群的一些实例.

例 1.4.1 设 H 是实数 $\mathbb{R}$ 的非零子群, 则 H 必为下列二者之一:

(i) H 离散, 且 $H=a\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{R}^*$;

(ii) H 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

证明 如果 H 离散且非零, 则必存在一个 $b\in H$, $b>0$, 离散紧集 $H\bigcap[0,b]$ 必是有限集, 故它有最小元 $a>0$. 对任一 $x\in H$, 考虑 $x-\left[\dfrac{x}{a}\right]a$, 其中 $\left[\dfrac{x}{a}\right]$ 为 $\dfrac{x}{a}$ 的整数部分. 因 $0\leqslant x-\left[\dfrac{x}{a}\right]a<a$, 且 $x-\left[\dfrac{x}{a}\right]a\in H$, 故它为 0, 即 $x=\left[\dfrac{x}{a}\right]a$, $H=a\mathbb{Z}$.

如 H 不是离散的, 则对任意 $\varepsilon>0$, 有 x, 使 $0<x\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ 及 $x\in H$. 取 $nx(n\in\mathbb{Z})$ 作分点将 $\mathbb{R}$ 分成无穷多个长小于 ε 的区间 $\{[nx,(n+1)x]|n\in\mathbb{Z}\}$, 任一 $r\in\mathbb{R}$ 必落入某个区间中. 注意, 这些分点都是 H 中元素. 这说明 H 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

注 此例说明 $\mathbb{R}$ 的任一非零加法子群都是无界的.

例 1.4.2 设 G 为正则局部紧群, H 为 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}$ 的一个离散子群 $r\mathbb{Z}$, $f:H\to G$ 为连续同态, 则

(i) 如果存在 $a \in \mathbb{R}$ 及 G 的单位元邻域 U, 使得 $\{h \in H | f(h) \in U\} \subseteq [-a, a]$, 则 $H \to f(H)$ 是拓扑同构.

(ii) 设 $f : H \to f(H)$ 不是拓扑同构, 则 $\overline{f(H)}$ 是 G 的紧子群, 且对 G 的单位元的任一个开邻域 U, 存在 $\delta > 0, \delta \in H$, 使得 $\forall h \in H$, $f([h, , h + \delta] \cap H) \cap U \neq \varnothing$.

证明　(i) 从已知条件可知 U 的原像是有界的, 特别单位元 e 的原像即 $\mathrm{Ker}f$ 是有界的. 由上例的注可知 H 的子群 $\mathrm{Ker}f = \{0\}$. 下面我们用命题 1.3.5 证明 f 是开映射. 显然 $\mathbb{R}$ 或 $r\mathbb{Z}$ 都是正则局部紧的 σ-紧群, 我们只要说明 $f(H)$ 是正则局部可数紧群即可. 因为 G 是局部紧的, 故存在单位元的开邻域 V, 使得 $\overline{V}$ 紧且 $\overline{V} \subseteq U$(由命题 1.1.6, 1.1.7 可得). $\overline{V} \cap f(H) = \overline{V} \cap f([-a, a] \cap H)$ 是紧集, 这说明 $f(H)$ 是正则局部紧. 结论得证.

(ii) 设 $f : H \to f(H)$ 不是拓扑同构. 因为 $\overline{f(H)}$ 在 G 中闭, 故必是局部紧. 不妨设 $G = \overline{f(H)}$, 则 G 是交换群. 取 $a > 0$, 对 G 中任一开集 $A \neq \varnothing$, 必存在 $t \in H$ 和 G 的单位元开邻域 U, 使得 $U = U^{-1}$, $f(t)U \subseteq A$. 由 (i) 知, U 的原像必无界, 于是有 $h \in H$ 且 $h > a + |t|$, 使 $f(h) \in U$, 故 $f(t+h) = f(t)f(h) \subseteq f(t)U \subseteq A$. 这就是说, 在 G 的任一开集中都有点, 其原像属于 (a, ∞). 换句话说 $\overline{f((a, \infty) \cap H)} = G$, 则 f 在 G 的任一开集中都有像点. 现取 V 为 G 的单位元开邻域, 使得 $V = V^{-1}$ 及 $\overline{V}$ 是紧集. 则对任意 $x \in G$, 存在 $y \in xV \cap f((a, \infty) \cap H)$, $x \in yV^{-1} = yV \subseteq f((a, \infty) \cap H)V$. 因此 $G = f((a, \infty) \cap H)V$. 由此出发并注意到 $\overline{V}$ 是紧集, 可知存在有限个元素 $t_1, t_2, \cdots, t_x \in (a, \infty) \cap H$, 使得 $\overline{V} \subset \bigcup\limits_{t=1}^{n} f(t_i)V$. 记 $m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant a} t_i$. 对任意 $x \in G$, 令 $t_x = \inf(f^{-1}(x\overline{V}) \cap [0, \infty))$, 则 $f(t_x) \in x\overline{V}$. 故存在 t_j, 使得 $f(t_x) \in xf(t_j)V$, 即 $f(t_x - t_j) \in xV$. 因 $t_x - t_j < t_x$, 由上面对 t_x 假设可知 $t_x - t_j < 0$, 即 $t_x < m$. 注意到 $x \in f(t_x)\overline{V}$, 因此 $G = f([0, m] \cap H)\overline{V}$. 由于当 $H = \mathbb{R}$ 或 $r\mathbb{Z}$ 时, $[0, m] \cap H$ 是紧集, 故 G 是紧群. 对 G 的单位元的任意开邻域 U, 取一开邻域 V, 使得 $\overline{V} \subset U$, $V = V^{-1}$ 且 $\overline{V}$ 是紧集 (由命题 1.1.6, 1.1.7 可得 V 的存在性). 由上述可知, 存在 $m > 0$, $G = f([0, m] \cap H)\overline{V}$. 对任意 $h \in H$, 有 $f(-h) = f(t)\overline{V}$, 其中 $t \in [0, m]$, 即 $f(t + h) \in \overline{V}^{-1} = \overline{V} \subset U$. 因此只要取 $\delta = m$ 即可.

下面我们讨论一下 G 的子群的开和闭的性质.

命题 1.4.1　设 G 是拓扑群, 则

(1)G 的每个开子群一定是闭的, 每个有有限指数的闭子群一定是开的.

(2)G 的含有单位元 e 的任意一个邻域的子群一定是开的.

证明　(1) 设 H 是 G 的开子群, $G \backslash H = \bigcup\limits_{b \notin H} bH$. 由命题 1.2.2, 每个 bH 为开集, 因此 $G \backslash H$ 是开的, 即 H 为闭的. 再设 H 是闭子群, 由命题 1.2.2, 每个 bH 为闭集, 若 $[G : H] < \infty$, 则 $G \backslash H$ 是闭集, 即 H 是开的.

(2) 设 H 是 G 的子群且包含单位元 e 的一个邻域, 则它必包含一个含单位元

的开集 U, 显然有 $H = UH$. 由命题 1.2.2 可知 H 是开的. □

设 G 为拓扑群, H 是 G 的子群. 则由等价关系: $a \sim b \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$, 可得商空间 $G/H = \{aH | a \in G\}$, 以 ρ 记商映射 $G \to G/H$, $x \mapsto xH$. 由商拓扑定义可知 G/H 中集合 V 为开集当且仅当 $\rho^{-1}V$ 为开集. G/H 称为 G 相对于 H 的左陪集空间. 我们有

命题 1.4.2 G 是拓扑群, H 是 G 的子群, G/H 是 G 相对于 H 的左陪集空间. 则

(1) 商映射 $\rho : G \to G/H$ 是开的.

(2) H 是开子群 $\Leftrightarrow G/H$ 具有离散拓扑.

证明 (1) 设 S 是 G 的开集, 我们只需证 ρS 是 G/H 中开集. 由商拓扑定义, 只要证明 $\rho^{-1}\rho S$ 是 G 中开集即可. 注意到

$$\rho^{-1}\rho S = \{\text{与 } S \text{ 相交的 } H \text{ 的陪集元素之并}\} = SH,$$

由命题 1.2.2, 可知 SH 为 G 中开集. 故 ρ 是开的.

(2) H 是开子群 $\Leftrightarrow H$ 的所有陪集都是开集 $\Leftrightarrow G/H$ 的每个点都是开集 $\Leftrightarrow G/H$ 具有离散拓扑. □

当 $H \lhd G$ 时, G/H 有群结构, 同时上述有商拓扑. 这两个结构是否相容呢? 下面命题回答了这个问题.

命题 1.4.3 G 是拓扑群, $H \lhd G$, 则 G/H 也是拓扑群.

证明 由于 ρ 是同态, 我们有下面两个可交换图表

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ {\scriptstyle \rho\times\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ G/H \times G/H & \xrightarrow[\mu']{} & G/H \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\nu} & G \\ {\scriptstyle \rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ G/H & \xrightarrow[\nu']{} & G/H \end{array}$$

其中 μ, ν 分别表示 G 中的乘法和求逆运算, μ', ν' 分别表示 G/H 中的乘法和求逆运算. 只需说明 μ', ν' 是连续映射. 看左图, 由 μ, ρ 连续可得 $\mu_0'(\rho \times \rho)$ 连续. 设 G/H 中有一开集 U, 使得 $\mu'^{-2}U$ 不是开集. 但是 $(\rho \times \rho)^{-1}\mu'^{-1}U$ 是开集, 由乘积拓扑的定义不难证明 $\rho \times \rho$ 也是开映射. 这样就有 $\mu'^{-1}U = (\rho \times \rho)(\rho \times \rho)^{-1}\mu'^{-1}U$ 为开集, 矛盾. 因此 μ' 连续. 同理, ν' 也连续. □

在命题 1.4.3 的条件下得到的拓扑群 G/H 称为 G 的商群.

设有 φ 是从拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 上的连续满同态, $\mathrm{Ker}\varphi = N$, 则作为抽象群来说, 商群 G_1/N 与 G_2 同构. 设

$$\varphi^* : G_1/N \to G_2,$$
$$aN \mapsto \varphi(a),$$

表示这个同构. 自然 $\varphi = \varphi^*\rho$. ρ 是商映射, 是开且连续的同态. 故若有开集 $U \subseteq G_2$, 则 $\varphi^{-1}U = \rho^{-1}\varphi^{*-1}U$ 是 G_1 中开集, 即 $\varphi^{*-1}U$ 是 G_1/N 中开集. 因此 φ^* 是连续同态. 由群同构可知 φ^* 是 $1-1$ 的映射. 若再假定 φ 是开映射, V 是 G_1/N 中开集, 则 $\rho^{-1}V$ 是 G_1 中开集, 因此 $\varphi^*V = \varphi\rho^{-1}V$ 是 G_2 中开集, 即 φ^* 为开映射. 于是有

命题 1.4.4 设 $\varphi: G_1 \to G_2$ 是拓扑群的开连续映射, $N = \mathrm{Ker}\varphi$, 则存在唯一拓扑群同构 $\varphi^*: G_1/N \to \mathrm{Im}\varphi$, 且 $\varphi = \varphi^* \cdot \rho$, 其中 ρ 为商映射: $G \to G/N$. □

在群论中, 除了类似上述命题的基本定理外, 还有一些同构定理, 在拓扑群中有一个是成立的, 即

命题 1.4.5 设 G 是拓扑群, L, H 是 G 的子群, $H \subseteq L$. 则将 L/H 视为 G/H 的子空间或是 L 的商空间, 这两种拓扑是等价的. 特别地, 当 $H \triangleleft G$ 时, G/H 的每个子群都拓扑同构于一个商群 L/H, $H \subseteq L \subseteq G$. 进一步, 如果 $L \triangleleft G$, 则有拓扑群同构:

$$(G/H)/(L/H) \cong G/L.$$

证明 我们先证明 L/H 作为 L 的商空间与作为 G/H 的子空间有同样拓扑. 按商空间定义, U 是 L/H 中开集指 $\rho^{-1}U$ 是 L 中开集, 即 $\rho^{-1}U = A \cap L$, 其中 A 是 G 的开集. 因此 ρA 是 G/H 的开集. 由于 H 是 L 的子群, 故有 $U = \rho(A \cap L) = \rho A \cap \rho L$ (注意: 一般, $\rho(A \cap B) = \rho A \cap \rho B$ 不成立), 即 $U = \rho A \cap L/H$. 这正说明 U 按照 G/H 子空间中拓扑也是开集. 上述推理过程可以逆转, 因此两个拓扑是等价的.

当 $H \triangleleft G$ 时, 由群论知道, G/H 的子群同构于一个商群 L/H. 由于上面所述, 两个拓扑是相同的, 因此这是一个拓扑同构. 进一步, 如果 $L \triangleleft G$, 考虑满连续同态

$$G \xrightarrow{\rho} G/H \xrightarrow{\rho'} (G/H)/(L/H),$$

其中 ρ, ρ' 都是开映射, $\mathrm{Ker}(\rho'\rho) = L$. 因此由命题 1.4.4 可得所需结论. □

例 1.4.3 (1)

$$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*,$$

$$t \mapsto \exp(2\pi i t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t),$$

这是一个连续映射, $\mathrm{Ker}\varphi = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Im}\varphi = S^1$. 不难证明 φ 是开映射, 故有拓扑群同构

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1.$$

(2)

$$\varphi: C^* \to \mathbb{R}_+^\times,$$

$$z \mapsto |z|.$$

φ 是开的满连续同态, $\mathrm{Ker}\varphi = S^1$, 因此有

$$\mathbb{C}^*/S^1 \cong \mathbb{R}_+^\times.$$

(3)

$$\varphi : \mathbb{C}^* \to S^1,$$

$$z \mapsto z/|z|.$$

它的核为 $\mathbb{R}_+^\times$. 于是有

$$\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+^\times \cong S^1.$$

(4) 行列式映射

$$\delta : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*,$$

$$A \mapsto \det A,$$

δ 是开的、满连续同态, 核为 $SL_n(\mathbb{R})$. 故有拓扑群同构

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*.$$

(5) 记 $H = \{A = \lambda I_* | \lambda \in \mathbb{R}^*\}$, 它是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的正规子群, 同构于 $\mathbb{R}^*$. 作商群

$$GL_n(\mathbb{R})/H,$$

它叫做射影一般线性群, 是一个拓扑群.

由命题 1.1.2 立刻可以得到

命题 1.4.6 设 G 是拓扑群, H 是 G 的子群, 则

(1) G 是紧群, H 是闭子群 $\Rightarrow$ H 是紧群;

(2) G 是紧群 $\Rightarrow G/H$ 是紧空间. □

为了进一步讨论拓扑群 G 的紧性与其子群及商空间紧性的关系. 我们介绍下列拓扑空间紧性的等价条件. 这对下一章也是有用的.

命题 1.4.7 X 是拓扑空间, 则下列陈述等价:

(1) X 是紧空间;

(2) 设 $\{X_i\}$ 是 X 中一个非空子集族, 若它满足: 对任意两个 X_i, X_j, 必存在 X_k, 使得 $X_k \subseteq X_i \cap X_j$, 则必有 $x \in X$, 使得 $x \in \bigcap\limits_i \overline{X}_i$;

(3) 设 $\mathscr{J} = \{Y_i\}$ 是 X 中非空开集族, 且满足: (i) 对 $Y_i, Y_j \in \mathscr{J}$, 有 $Y_i \cup Y_j \in \mathscr{J}$; (ii) 若 $Y_i \in \mathscr{J}$, $Y \subseteq Y_i$, 且 Y 是开集, 则 $Y \in \mathscr{J}$. 假定 $X \notin \mathscr{J}$, 则 $\bigcup\limits_i Y_i \neq X$.

证明 我们循环论证.

(1) $\Rightarrow$ (2): 设 X 紧, $\{X_i\}$ 是满足 (2) 中条件的子集族, 以 V_i 记 $\overline{X}_i$ 之补集. 我们只需证明 $\{V_i\}$ 不可覆盖 X. 如若不然, 必存在 $V_i, \cdots, V_{i_n}$, 它们是 X 的有限开

覆盖. 对应 $\{X_i\}$ 中子集为 $X_i, \cdots, X_{i_n}$, 由假设必有一个 $X_i \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} X_{i_k}$. 这就是说 $V_i \supseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k} = X$. 但这与 X_i 非空矛盾.

(2) ⇒ (3): 设 $\{Y_i\}$ 是满足 (3) 的开集族, 令 X_i 为 Y_i 之补集, 则 $\{X_i\}$ 为满足条件 (2) 的非空闭集族, 由 (2) 有 $x \in \bigcap_i \overline{X}_i = \bigcap_i X_i$, 故 $x \notin \bigcup_i Y_i$, 即 $\bigcup_i Y_i \neq X$.

(3) ⇒ (1): 设 X 有一个开覆盖 $\{U_i\}$, 我们构造一个开集族

$$\mathscr{J} = \{U | U\text{开, 且 } U \subseteq \text{有限个 } U_i\text{的并}\}.$$

显然 $\mathscr{J}$ 满足 (3) 中所列条件. 因为每个 $U_i \in \mathscr{J}$, 因此 $\bigcup_{U \in \mathscr{J}} U = X$, 由 (3) 可得, 必有 $X \in \mathscr{J}$, 即有限个 U_i 之并可覆盖 X. □

命题 1.4.8　G 是一个拓扑群, C 是 G 的紧子集, A 是包含 C 的开集, 则存在 e 的一个开邻域 V, 使得 $VC \subseteq A$.

证明　对任意 $x \in C$, 存在 e 的开邻域 W_x, 使得 $W_x x \subseteq A$. 由命题 1.3.1, 存在 e 的开邻域 V_x, 使得 $V_x^2 \subseteq W_x$, $\bigcup_{x \in C} V_x x \supseteq C$. 由 C 的紧性, 存在 $x_1, \cdots, x_n$, 及相应的 $V_1, \cdots, V_n$, 使得 $\bigcup_{i=1}^{n} V_i x_i \supseteq C$. 取 $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, 则 $VC \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} VV_i x_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} W_i x_i \subseteq A$, 此处 $W_i = W x_i$. □

命题 1.4.9　G 是一个拓扑群, H 是 G 的子群. 若 H 与商空间 G/H 都是紧的, 则 G 也是紧的.

证明　我们用命题 1.4.7 来证明, 设 $\mathscr{J}$ 是 G 中满足 1.4.7(3) 中条件的开集族, 且设 $\bigcup_{Y \in \mathscr{J}} Y = G$, 我们只要证明 $G \in \mathscr{J}$ 即可.

设 ρ 为商映射 $G \to G/H$. 定义

$$\mathscr{J}' = \{V | V\text{是 } G/H \text{ 中开集，且 } \rho^{-1}V \in \mathscr{J}\}.$$

不难看出 $\mathscr{J}'$ 满足 1.4.7(3) 中条件. 我们希望证明 $\mathscr{J}'$ 中元素覆盖 G/H.

因 H 是紧的, 故对任意 $x \in G$, xH 是紧集. $\mathscr{J}$ 可看作是 xH 的覆盖, 因此存在有限个元素覆盖 xH. 取它们的并, 记为 A, 则有 $xH \subseteq A$, $A \in \mathscr{J}$. 由命题 1.4.8 可知, 存在 e 的开邻域 W, 使得 $WxH \subseteq A$. WxH 是开集, 由 $\mathscr{J}$ 满足条件知道 $WxH \in \mathscr{J}$. WxH 是 H 若干个陪集元素的并. 因此有

$$\rho^{-1}\rho WxH = WxH \in \mathscr{J}.$$

于是 $\rho WxH \in \mathscr{J}'$. 注意到 $x \in WxH$, 因此 $x \in \mathscr{J}'$, $\forall x \in G$, 即 $\bigcup_{V \in \mathscr{J}'} V = G/H$. 由 G/H 的紧性, 根据命题 1.4.7(3) 可知 $G/H \in \mathscr{J}'$. 于是 $G = \rho^{-1}(G/H) \in \mathscr{J}$. 仍由 1.4.7 可知, G 是紧群. □

命题 1.4.10 设 G 是拓扑群, H 是 G 的子群, 则

(1) G 是局部紧的 $\Leftrightarrow e$ 存在紧邻域;

(2) G 是局部紧的, H 是闭的 $\Rightarrow H$ 是局部紧的;

(3) G 是局部紧的 $\Rightarrow G/H$ 是局部紧的;

(4) G/H 与 H 都是局部紧的 $\Rightarrow G$ 是局部紧的.

证明 由命题 1.1.2 得到 (1), 命题 1.1.5 得到 (2) 和 (3). 下面证明 (4).

首先, 我们注意一个事实, 即拓扑群 (或它的商空间) 的任意一点的邻域都包含该点的一个闭邻域 (读者可参见命题 1.6.1). 因此我们有 e 的闭邻域 U_0, 由命题 1.1.2 可知 $U_0 \cap H$ 是紧集. 由命题 1.3.1 可知存在的 e 的闭邻域 U, 使得 $U^{-1}U \subseteq U_0$, 于是 $U \cap H$ 仍是 e 的紧闭邻域. 设 $x \in U$, 则 $H \cap x^{-1}U$ 闭且包含在 $H \cap U_0$ 中, 故它是紧集. 因此, $xH \cap U = x(H \cap x^{-1}U)$ 也是紧集.

下面我们证明存在 e 的闭邻域 $V \subseteq U$, 使得 $\rho V = C$, 且 C 是 G/H 中紧集, 这里 ρ 是商映射 $G \to G/H$. 首先取 e 的闭邻域 V_0, 使得 $V_0^{-1}V_0 \subset U$. 由于 G/H 是局部紧的, 故存在 H 的闭、紧邻域 C_0. ρV_0 是 H 的邻域. 由 G/H 的正则性, 存在 H 的闭域 $C_1 \subseteq \rho V_0$. 取 $C = C_1 \cap C_0$, 它也是闭、紧的. 令 $V = V_0 \cap \rho^{-1}C$, 则有 V 闭且 $\rho V = C$. 下面我们证明这个 V 即是 e 在 G 中的紧邻域.

设 $\mathscr{J}$ 是 V 的一个开集族, 它满足命题 1.4.7(3) 的两个条件, 且 $\mathscr{J}$ 覆盖 V. 令

$$\mathscr{J}' = \{A | A \text{ 是 } C \text{ 中开集, 使得 } \rho^{-1}A \cap V \in \mathscr{J}\}.$$

不难看出, $\mathscr{J}'$ 也满足 1.4.7(3) 中两条件, 只要证明 $\mathscr{J}'$ 覆盖 C, 由 1.4.7 知 $C \in \mathscr{J}'$, 于是 $V = \rho^{-1}C \cap V \in \mathscr{J}$, 从而 V 是紧集.

对任意 $x \in V$, 由前述 $xH \cap V$ 为紧的, 它被 $\mathscr{J}$ 所覆盖, 故存在 $\mathscr{J}$ 中有限个元素覆盖它, 设这些元素的并为 J, 则有 $xH \cap V \subseteq J \in \mathscr{J}$. 于是 $xH \cap U \subseteq J \cup (G \backslash V)$, 后者为开集. 由命题 1.4.8, 它有开邻域 W, 使得 $W(xH \cap U) \subseteq J \cup (G \backslash V)$. 不妨设 $W \subseteq V$, 则 $WxH \cap V \subseteq J$, 由 $\mathscr{J}$ 的性质得到 $WxH \cap V \in \mathscr{J}$. 注意到 $WxH = \rho^{-1}\rho Wx$, 由 $\mathscr{J}'$ 的定义可知 $\rho Wx \in \mathscr{J}'$. 特别地, $\rho(x) \in \mathscr{J}'$, 对任一 $x \in V$, 因 $\rho(V) = C$, 故 $\mathscr{J}'$ 覆盖 C. □

1.5 拓扑群的积

设 $\{G_i\}_{i \in I}$ 是一组拓扑群. 作乘积

$$G = \prod_{i \in I} G_i,$$

它既是群, 又是拓扑空间, 事实上, 它是个拓扑群.

命题 1.5.1 设 $\{G_i\}$ 是一组拓扑群, 则 $G=\prod\limits_{i\in I}G_i$ 是一个拓扑群.

证明 只需证明 G 中的乘法运算 μ 和求逆运算 ν 是连续的. 由 G 中运算的定义可知下面两图是交换图.

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ {\scriptstyle \pi_i\times\pi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ G_i\times G_i & \xrightarrow{\mu_i} & G_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\nu} & G \\ {\scriptstyle \pi_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ G_i & \xrightarrow[\nu_i]{} & G_i \end{array}$$

现在我们证明 μ 连续. 设 G 中有一个开集合, 不妨设它是开基中的元, $V=\prod\limits_i N_i$ 除了 $i=i_1,\cdots,i_s$ 外其余 $N_i=G_i$. 对一切 π_i, $\pi_i(V)=N_i$ 是开集. 但 $\pi_i^{-1}(N_i)=\Big(\prod\limits_{j\neq i}G_j\Big)\times N_i$, 这样

$$\bigcap_{k=1}^{s}\pi_{i_k}^{-1}\pi_{i_k}(V)=V.$$

于是

$$\mu^{-1}(V)=\mu^{-1}\Big(\bigcap_{k=1}^{s}\pi_{i_k}^{-1}\pi_{i_k}(V)\Big)=\bigcap_{k=1}^{s}(\mu^{-1}\pi_{i_k}^{-1})\pi_{i_k}(V).$$

由上图可知 $\pi_{i_k}\mu$ 连续, 因 $\pi_{i_k}(V)$ 开, $\forall k=1,2,\cdots,s$, 故 $\mu^{-1}(V)$ 为开集. ν 的连续性证明类似, 不再赘述. □

例 $(\mathbb{R}^n,+)$ 是按距离拓扑和加法构成的拓扑群, 同时也是 n 个拓扑群的积:

$$\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n},$$

因为 $\mathbb{R}^n$ 中有球形开基, 而 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ 有开立方体形开基. 显然这两种拓扑是一致的.

由命题 1.1.3 和 1.1.5 立即得到

命题 1.5.2 设 $\{G_i\}$ 是一组拓扑群, 则

(1) ΠG_i 是紧群 $\Leftrightarrow\forall i$, G_i 是紧群;

(2) ΠG_i 是局部紧的 $\Leftrightarrow\forall i$, G_i 是局部紧的, 且除有限个以外, G_i 是紧的. □

1.6 分 离 性

本节将要证明 T_0 拓扑群一定是正则空间, 我们将对这种空间作些详细讨论.

命题 1.6.1 (1) T_0 拓扑群 G 必是正则空间,

(2) 若 G 的任意左陪集空间 G/H 是 T_0 空间, 则必是正则空间.

证明 (1) 对单位元 e 和一个闭集 A, $e\notin A$, 考虑 A 的补集 $G\backslash A$. 它是含有 e 的开集, 一定包含 e 的开基中的元素 W. 由命题 1.3.1, 存在 e 的开邻域 V, 使得 $V^{-1}V\subseteq W\subseteq G\backslash A$, 即 $V^{-1}V\cap A=\varnothing$. 这样 $V\cap VA=\varnothing$, $A\subseteq VA=U$ 是开集.

(2) 设 A 是 G/H 中闭集, $xH\in G/H$, $xH\notin A$, ρ 为商映射, $\widetilde{A}=\rho^{-1}A$ 是 G 中闭集. $x\notin\widetilde{A}$, 故 $e\notin\widetilde{A}x^{-1}$. 由 (1) 可知存在 e 的开邻域 V, 使得 $V\cap V\widetilde{A}x^{-1}=\varnothing$, 即 $Vx\cap V\widetilde{A}=\varnothing$. $\widetilde{A}$ 是 H 的若干陪集的并, 故 $V\widetilde{A}$ 亦是. $V\widetilde{x}$ 与 Vx 无交, 自然与 Vx 所在陪集也不相交, 所以 $VxH\cap V\widetilde{A}=\varnothing$. 因此 $\rho(VxH)\cap\rho(V\widetilde{A})=\varnothing$. $\rho(VxH)$ 和 $\rho(V\widetilde{A})$ 都是开集, 且 $xH\in\rho(VxH)$, $A\subseteq\rho(V\widetilde{A})$. □

由命题 1.1.1 和 1.6.1, 我们可得

系理 G 是一个拓扑群, 则

G 是 T_0 空间 $\Leftrightarrow G$ 是 T_1 空间 $\Leftrightarrow G$ 是 T_2 空间 $\Leftrightarrow G$ 是 T_3(即正则) 空间. □

命题 1.6.2 设 G 为一拓扑群, $\mathscr{F}$ 是单位元 e 的基本邻域组, 则下列陈述等价:

(1) G 是 Hausdorff 空间;

(2) 对角线映射 $\delta: G\to G\times G$, $x\mapsto(x,x)$ 是闭映射;

(3) $\{e\}$ 是闭集;

(4) 设 $f: H\to G$ 是连续同态, 则 $\mathrm{Ker}f$ 是 H 的闭集;

(5) $\cap\mathscr{F}=\{e\}$(此处 $\cap\mathscr{F}$ 表示 $\mathscr{F}$ 中一切元素的交);

(6) e 的一切开邻域之交为 $\{e\}$.

证明 我们用循环法证明.

(1)⇒(2): 设 Y 是 G 中闭集. 只需证 δY 是 $G\times G$ 的闭集. 设 $(a,b)\notin\delta Y$, 则或 $a\neq b$ 或 $a=b\notin Y$. 若 $a\neq b$, 由 T_2 性质, 存在无交开集 A,B, $a\in A$, $b\in B$. $A\times B$ 是 $G\times G$ 的开集. 因 A,B 不相交, 必有 $(A\times B)\cap\delta Y=\varnothing$. 若 $a=b\notin Y$, Y 闭, 则存在 a 的邻域 A , 使 $A\cap Y=\varnothing$, 则 $(a,b)\in A\times A$, 后者是 $G\times G$ 的开集, $A\times A\cap\delta Y=\varnothing$. 因此 δY 是闭集.

(2)⇒(3): δ 为闭映射, 则对角线 $\bigwedge=\delta G=\{(a,a)|a\in G\}$ 是个闭集, 其补集 $(G\times G)\backslash\bigwedge$ 为 $G\times G$ 中开集. 我们只需证明 $A=G\backslash\{e\}$ 是开集. 设 $x\neq e$, 则 $(x,e)\in(G\times G)\backslash\bigwedge$, 即存在开集 $U\times V$, 使 $(x,e)\in U\times V\subseteq G\times G\backslash\bigwedge$. 由此可知 $U\cap V=\varnothing$. 因此 $x\in U\subseteq A$, 即 A 为开集.

(3)⇒(4): $\mathrm{Ker}f$ 是闭集 $\{e\}$ 的原像, 故为 H 中闭集.

(4)⇒(5): 取 f 为恒同映射, 则 $\mathrm{Ker}f=\{e\}$ 是闭集, G 中任意一点都是闭的. 如 $a\neq e$, $G\backslash\{a\}$ 为包含 e 的开集, 必有 $\mathscr{F}$ 中一个元素与 $\{a\}$ 不相交, 即 $a\notin\cap\mathscr{F}$.

(5)⇒(6): 显然.

(6)⇒(1): 设 $a \neq b$, 即 $ab^{-1} \neq e \Rightarrow$ 存在 e 的开邻域 U, $ab^{-1} \notin U \Rightarrow$ 有 $\mathscr{F}$ 中元 V, 使 $V^{-1}V \subseteq U$, $V^{-1}V \cap \{ab^{-1}\} = \varnothing \Rightarrow Vb \cap Va = \varnothing$, Vb 与 Va 分别是 b 和 a 的开邻域 $\Rightarrow G$ 是 Hausdorff 群. □

注 (1) 与 (2) 等价对一般拓扑空间都对.

命题 1.6.3 (1) 设 X 是 Hausdorff 拓扑空间, $f: Y \to X$ 是单的连续同态, 则 Y 是 Hausdorff 的. 特别地, X 的子空间是 Hausdorff 的.

(2) 设 $\{X_i\}_{i\in I}$ 是非空拓扑空间组, $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$, 则 X 是 Hausdorff 空间 $\Leftrightarrow$ 每个 X_i 是 Hausdorff 空间.

证明 (1) 设 $a \neq b$ 是 Y 中两点, 由单性可知 $f(a) \neq f(b)$, 则 A, B 分别是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的开邻域, 且 $A \cap B = \varnothing$. 同样由单性: $f^{-1}A \cap f^{-1}B = \varnothing$, $a \in f^{-1}A$, $b \in f^{-1}B$.

(2) 设 X 是 Hausdorff 空间. 对每个 i, 构造一个单映射 $f_i: X_i \to X$. 造法如下: 对每个 $j \neq i$, 将 X_i 中每个元映为 X^j 中一个确定的元素 x^j, 对于 X_i, 则把它的每个元映为自身. 这样 f_i 是单连续同态. 由 (1), X_i 是 Hausdorff 空间.

反之, 设每个 X_i 是 Hausdorff 空间. 如果 X 中有不同两点列 $\{a_i\}, \{b_i\}$, 则至少有一个 i, 使得 $a_i \neq b_i$. 于是有 X_i 中两个不相交开集 A, B, 使得 $a_i \in A$, $b_i \in B$. 则 A, B 在投影映射下的原像必为 X 中不相交开集, 且分别包有 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$. □

命题 1.6.4 G, $\{G_i\}$ 都是拓扑群, H 是 G 的子群, 则

(1)G 是 Hausdorff 群 $\Rightarrow H$ 是 Hausdorff 群;

(2)G/H 是 Hausdorff 空间 $\Leftrightarrow H$ 是 G 的闭子群;

(3)H 和 G/H 都是 Hausdorff 的 $\Rightarrow G$ 是 Hausdorff 的;

(4)ΠG_i 是 Hausdorff 的 $\Leftrightarrow$ 每个 G_i 是 Hausdorff 的.

证明 (1), (4) 可由命题 1.6.3 得到.

(2) 商映射 $G \to G/H$ 是连续且开的. 不难看出它也是一个闭映射. 于是“H 在 G 中是闭的”等价于“H 在 G/H 中是闭的”. 由命题 1.6.2 又知“H 在 G/H 中是闭的”等价于“G/H 是 Hausdorff 空间”.

(3) 设 G/H 和 H 都是 Hausdorff 的. 由命题 1.6.2 知 $\{e\}$ 是 H 中闭集, 由 (2) 知 H 是 G 中闭集. 根据子空间拓扑定义 $\{e\} = V \cap H$, 其中 V 是 G 中闭集, 因此 $\{e\}$ 是 G 中闭集, 故 G 是 Hausdorff 群. □

例 (1)$(\mathbb{R}, +)$ 与 $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ 及其子群都是 Hausdorff 群.

(2) $S^1((\mathbb{C}^*, \cdot)$的子群) 是 Hausdorff 群.

(3) $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ 是 Hausdorff 群.

(4) $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 因此不是闭集, 故 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ 不是 Hausdorff 群.

1.7 连 通 性

定义 1.7.1 一个拓扑空间称为连通的, 如果它不能表为两个非空、无交的开集之并. 反之, 则称它是不连通的.

称拓扑空间 X 是局部连通的, 如果对 $\forall x \in X$ 及 x 的每个邻域 U, 都存在 x 的连通邻域 V, 使 $V \subseteq U$.

显然, 一个拓扑空间是连通的, 当且仅当它没有非平凡的既开又闭的子集. 由命题 1.4.1 可得.

命题 1.7.1 G 是连通拓扑群, 则它没有真开子群, 也没有具有有限指数的真闭子群. □

我们先证明一个关于拓扑空间连通性的基本定理.

命题 1.7.2 (1)X 是连通的, $\varphi: X \to Y$ 连续, 则 φX 连通;

(2)ΠX_i 是连通的当且仅当每个 X_i 连通.

证明 (1) 显然.

(2) 设 $X = \Pi X_i$ 连通, 则 $X_i = \pi_i X$, 由 (1) 可知 X_i 连通 (对任意的 i).

反之, 若对一切 i, X_i 皆为连通的, 设 A 为 X 中既开且闭的子集, 则 $A \supseteq \prod\limits_{i\in I} U_i$, 其中 U_i 为 X_i 中开集, 且除有限个以外 $U_i = X_i$. 于是对任意 $x \in X$, 必有一个 $a \in A$, 使得 x 与 a 只有有限个分量相异. 因此我们只需要证明, 若 X 中任意一个元素 x 与 A 中一个元素只有一个分量不同, 则 $x \in A$. 设 $a = \{a_i\}$, $x = \{x_i\}$, $a_j \neq x_j$. 构作一个连续映射 $Q_j: X_j \to X$. 对于任意 $y_j \in X_j$, $Q_j(y_j)$ 在 X_i 上分量为 a_i, 若 $i \neq j$. 而 $Q_j(y_j)$ 在 X_j 上分量为 y_j. Q_j 是常映射与恒同映射之积, 它是连续的. 由 (1), $Q_j X_j$ 是连通的. 考虑 $A \cap Q_j X_j$, 它是 $Q_j X_j$ 中既开又闭的集合. 显然 $a \in A \cap Q_j X_j$, 即 $A \cap Q_j X_j \neq \varnothing$. 因此 $A \cap Q_j X_j = Q_j X_j$, 即 $A \supseteq Q_j X_j$. 所以 $x \in Q_j X_j \subseteq A$. □

命题 1.7.3 设 G, G_i 是拓扑群, H 是 G 的子群, 则

(1) G 连通 $\Rightarrow G/H$ 连通;

(2) H 与 G/H 都连通 $\Rightarrow G$ 连通;

(3) ΠG_i 为连通 $\Leftrightarrow$ 每个 G_i 都连通.

证明 由命题 1.7.2, 可立刻得到 (1), (3). 剩下的只需证 (2).

设 H 与 G/H 都是连通的, 设 $G = A \cup B$, A, B 都是既开又闭集合, 且 $A \cap B = \varnothing$. 由命题 1.7.2(1), H 的每个左陪集都连通. 因此 H 的任一左陪集或是与 A(或 B) 无交, 或是包含在 A(或 B) 之中. 于是 A 和 B 都是若干个 H 的陪集之并. 且 $\rho A \cup \rho B = G/H$, $\rho A \cap \rho B = \varnothing$, 这里 ρ 仍记开映射. 因 ρ 是开映射, ρA, ρB 是开

集. 由 G/H 的连通性, 必有其中之一, 不妨设 ρA 为空集, 于是 $A=\varnothing$. 这说明 G 是连通的. $\square$

定义 1.7.2　X 是一个拓扑空间, $x\in X$. 所有包含 x 的连通子空间之并, 称为 X 的在 x 点的连通分支, 或简称分支, 记为 $\mathrm{Comp}_x x$ 或 $\mathrm{Comp}(x)$.

命题 1.7.4　$\mathrm{Comp}(x)$ 是 X 中非空连通闭集, 且所有分支构成 X 的分割 (即 $X=\bigcup\limits_{x\in X}\mathrm{Comp}(x)$, 且任何两个分支或者重合或者不相交).

证明　显然 $\{x\}\in\mathrm{Comp}(x)$, 因此 $\mathrm{Comp}(x)$ 非空. 设它表示两个无交开集之并 $A\cup B$. 设 $x\in A$, 则每个包含 x 的连通子空间与 A 的交不空. 因此, 它们都包含在 A 中, 即 $B=\varnothing$. 因此 $\mathrm{Comp}(x)$ 是连通的.

下面证明 $C=\mathrm{Comp}(x)$ 为闭集. 用 $\overline{C}$ 记 C 的闭包, 可以证明 $\overline{C}$ 是连通的. 设 $\overline{C}=A\cup B$, A,B 为无交开集. 设 $x\in A$, 由前同理可知 $A\supseteq C$. 又 A 是闭集, 因此 $A\supseteq\overline{C}$, 即 $A=\overline{C}$, 于是 $\overline{C}$ 是连通的, 按分支定义 $\overline{C}\subseteq C$, 这正说明 $C=\overline{C}$, 即 C 为闭的.

显然, $X=\bigcup\limits_{x\in X}\mathrm{Comp}(x)$. 设 $z\in\mathrm{Comp}(x)\cap\mathrm{Comp}(y)$, 则 $\mathrm{Comp}(x)\subseteq\mathrm{Comp}(z)$. 由连通性及交不空可得 $\mathrm{Comp}(x)=\mathrm{Comp}(z)$. 同理 $\mathrm{Comp}(y)=\mathrm{Comp}(z)$. 因此任意两个分支或者不相交, 或者重合. 我们可以从每个分支取出一个代表元, 以 R 表所有代表元集合, 则

$$X=\bigcup_{x\in R}\mathrm{Comp}(x).$$ $\square$

定义 1.7.3　X 叫做完全不连通的, 如果它的每个分支由一个点组成.

在完全不连通空间中, 多于一个点的集合必是不连通的. 显然, 离散空间是完全不连通的. 反过来, 却不一定对 (见例 1.7.1(6)~(8)).

命题 1.7.5　设 G, $\{G_i\}$ 为拓扑群, H 为 G 的子群. 则

(1) G 是完全不连通的 $\Rightarrow$ H 是完全不连通的;

(2) G/H 与 H 均为完全不连通的 $\Rightarrow$ G 是完全不连通的;

(3) ΠG_i 是完全不连通的 $\Leftrightarrow$ 每个 G_i 都是完全不连通的.

证明　(1) 和 (3) 显然. 现在证明 (2). 设 A 是 G 的连通子空间, 则其在商映射下的像 ρA 是 G/H 中的连通子空间 (命题 1.7.2). G/H 是完全不连通的, 因此 ρA 是 G/H 中一个点. 所以 A 包含在 H 的一个陪集中, H 的每个陪集与 H 同胚, 故都是完全不连通的. A 为其中的连通子集, 必为一个点. 因此, G 是完全不连通的. $\square$

注　容易看出, (1) 和 (3) 对一般拓扑空间也成立.

下面是本节的一个主要结果.

命题 1.7.6　G 是一个拓扑群, H 是 G 在 e 处的分支, 则

(1) H 是 G 的闭的连通正规子群;

(2) G/H 是完全不连通的 Hausdorff 拓扑群;

(3) H 的全体陪集构成 G 的所有分支;

(4) G 的每个开子群包含 H.

证明 (1) 只需证明 H 是 G 的正规子群. 设 $h \in H$, $g \in G$, 则 hH, $g^{-1}Hg$ 与 H 同胚且是连通的, 与 H 的交非空. 由分支定义可知 $hH \subseteq H$, $g^{-1}Hg \subseteq H$. 这说明 H 是 G 的正规子群.

(2) H 是闭的, 由命题 1.6.4(2) 可知, G/H 是 Hausdorff 的. 又因 $H \triangleleft G$, 所以 G/H 是拓扑群. 拓扑群是齐性空间, 只需证明单位元的连通分支是一个点即可. 由 (1) 这个分支为 G/H 的连通子群, 由命题 1.4.5, 它必形如 L/H, L 是 G 中包含 H 的子群. H 连通, 由命题 1.7.3(2) 可知 L 连通, 且 $e \in L$. 因此 $L \subseteq H$, 即 $L = H$, 这说明 L/H 是 G/H 的单位元. 因此 G/H 是完全不连通的.

(3) 因拓扑群式齐性空间, H 是 e 处分支, 则 xH 为 x 处分支. 又由命题 1.7.4, 任意两个分支或者不相交或者重合. 因此 H 的全部陪集即是 G 的所有分支.

(4) 设 U 是 G 的开子集, 则由命题 1.4.1 可知 U 也是闭子群, $U \cap H$ 是 H 的非空开、闭子集. 由 H 的连通性可知 $U \cap H = H$, 即 $H \subseteq U$. □

注 我们常以 G^0 记 G 的单位元的连通分支.

定义 1.7.4 X 为拓扑空间, $a, b \in X$. 如果存在连续函数 $f : [0,1] \to X$, 使得 $f(0) = a$, $f(1) = b$, 则我们称 a, b 是路连通的. 如果 X 中任意两点都道路连通, 我们称 X 是道路连通的.

命题 1.7.7 X 是道路连通的 $\Leftrightarrow$ X 是连通的.

证明 读者可作为习题, 或参看 [Jia 78].

例 1.7.1 (1) $(\mathbb{R}^n, +)$ 是道路连通的. 对任意两点 a, b, 取 f 为 $t \mapsto (1-t)a+tb$.

(2) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ 分为两个连通分支: $\mathbb{R}^+$ 和 $\mathbb{R}^-$.

(3) 我们注意道路连通可以传递, 即若 a, b 是路连通, b, c 也是路连通的, 则 a, c 是路连通的. 设 f, g 分别是连接 a, b 和 b, c 的连续函数, 我们可取 $(1-t)f + tg$ 作为连接 a, c 的连续函数.

用这个结果我们可以证明 $(\mathbb{R}^n, +)$ 的子集 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 是连通的 $(n \geqslant 2)$. 显然, 对 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 的任意两点必存在第三点, 使得它与已知两点的连线都不通过 0. 由上述可知 $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ 是连通的.

(4) $S^n (n \geqslant 1)$ 是 $\mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\}$ 在连续映射 $x \mapsto x/|x|$ 之下的像, 因此是连通的.

(5) $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$(见习题 13), 由上例及命题 1.7.2 可知 T^n 是连通的.

(6) 作为 $\mathbb{R}$ 的加法子群 $\mathbb{Q}$ 是完全不连通的. 我们来证明: $\mathbb{Q}$ 的任意子集合 U

只要包含两点 a, b, 它就是不连通集合. 设 $a < b$, 则在 $[a, b]$ 中必含有一个无理数 r. 取 $A = \{x \in U | x < r\}$, $B = \{x \in U | x > r\}$, 则 $a \in A, b \in B$, 即 A, B 非空, 且 $A \cap B = \varnothing$. A, B 都是开集, $U = A \bigcup B$, 因此 U 是连通集. 这说明在 $\mathbb{Q}$ 中只有一个点的集合才是连通的, 因此是完全不连通的.

(7) $\mathbb{Q}$ 按 p-adic 拓扑也是完全不连通的. 它有以下群列构成的 0 点的基本开邻域组

$$U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots$$

(1.3 节例 1.3.1(1)). 由命题 1.7.6(4) 可知 0 的连通分支包含在一切 U_i 之中, 但显然 $\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} U_i = \{0\}$, 因此 0 的连通分支就是 $\{0\}$.

(8)F 是一个自由群, 我们有降中心群列

$$F = F_1 \supset F_2 \supset \cdots,$$

其中, F_2 是 F_1 的换位子群, $\cdots$, F_{n+1} 是 F_n 与 F_1 的换位子生成的群. 可以证明 $\cap F_n = \{e\}$. 以降中心群列中的元素作为 e 的基本开邻域组, 在此拓扑下, F 是完全不连通群.

命题 1.7.8 设 X 是紧 Hausdorff 空间, 则任意一点 x 的分支是包含 x 的所有开、闭集之交.

证明 设 $\{C_i\}_{i \in I}$ 是所有包含 x 的开、闭集. 由命题 1.7.6, 有 $C_i \supseteq \operatorname{Comp} x$, 故 $C = \bigcap\limits_{i \in I} C_i \supseteq \operatorname{Comp} x$. 只要证明 C 是连通集, 便可得 $C \subseteq \operatorname{Comp} x$, 命题便得证.

设 $C = A \cup B$, A, B 是 C 中无交开、闭集. 由于 C 是闭的, A, B 是 X 中闭集, 故是紧集, 从而存在 A', B' 是 X 中开集, 使得 $A' \cap B' = \varnothing$, $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$, 于是 X 有开覆盖:

$$X = \left(\bigcup_{i \in I} (X \backslash C_i)\right) \cup A' \cup B'.$$

因此有有限个 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 使得

$$X = \left(\bigcup_{i \in I} (X \backslash C_i)\right) \cup A' \cup B' = \left(X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} C_i\right) \cup A' \cup B'.$$

记 $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$, 则有 $C \subseteq D \subseteq A' \cup B'$. 于是

$$X = (X \backslash D) \cup (A' \cap D) \cup (B' \cap D).$$

这三个开集彼此不相交. 显然每个都是开、闭集. 设 $A' \cap D$ 非空, 则 $C \subseteq A' \cap D$, 且

$$C = (A' \cap D) \cap C = A' \cap C = A.$$

因此 C 是连通的. □

1.8 拓扑变换群

定义 1.8.1 设 G 为拓扑群, M 为拓扑空间. 称 G(左) 作用于 M 上, 或称 G 是 M 的拓扑变换群是指存在连续映射

$$G \times M \to M,$$
$$(g, x) \mapsto gx,$$

使得

(i) $\forall g_1, g_2 \in G, x \in M$, 有 $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$;

(ii) G 的单位元 e 对应 M 的恒等映射, 即 $ex = x, \forall x \in M$.

不难看出 $\forall g \in G, x \mapsto gx$ 是 M 上的同胚映射.

定义 1.8.2 设拓扑群 G 作用于拓扑空间 M 上. 如果对每个 $x \in M$, $\pi_x : G \to M$, $\pi_x(s) = sx$ 是满的, 则 M 称为相对于 G 的拓扑齐性空间.

显然, 如果对一切 $x \in M$, π_x 是满的, 则 G 在 M 上的作用是可迁的.

但 π_x 不一定是一一映射, 即可能有 $s_1x = s_2x$, 也就是 $s_1^{-1}s_2x = x$. 记

$$G_x = \{s \in G | sx = x\}.$$

它称为 x 的固定子群, 两个 G 中元在 π_x 作用下像相同说明它们属于 G_x 的同一陪集. 再者, 若 $y = tx, t \in G$, 则有 $G_y = tG_xt^{-1}$.

如果 M 是 Hausdorff 空间, 则 G_x 是闭集 $\{x\}$ 在 π_x 之下的原像, 故是闭子群.

例 1.8.1 (1)$G = M$. G 作用于自身是齐性空间 (命题 1.2.1).

(2) 设 H 是 G 的子群, 则 G 可作用于商空间 G/H 上: $s(xH) = (sx)H$, $s, x \in G$. 这是可迁的, 因此 G/H 是 G 的齐性空间. 固定子群为 $G_H = H$, 对 $a \in G$ 有 $G_{aH} = aHa^{-1}$.

设 M 是 G 上任一个 Hausdorff 拓扑齐性空间, $x \in M$, 则我们可以定义

$$\varphi : G/G_x \to M,$$
$$gG_x \mapsto gx,$$

它是满映射. 若 $g_1x = g_2x$, 则 $g_1^{-1}g_2 \in G_x$, 即 $g_1G_x = g_2G_x$, 因此 φ 又是单映射, 下面命题要说明 φ 是连续的.

命题 1.8.1 Hausdorff 空间 M 是拓扑群 G 上的齐性空间, $x \in M$, 则单、满映射 $\varphi : G/G_x \to M, gG_x \mapsto gx$ 是连续映射.

证明 以 ρ 记商同态 $G \to G/G_x$, 则 $\varphi \cdot \rho : G \to M$, $g \mapsto gx$(即为 π_x), 它是连续的. 设 U 为 M 的开子集, 则 $(\varphi \cdot \rho)^{-1}U$ 是 G 的开子集. ρ 是开映射, 故 $\rho(\varphi \cdot \rho)^{-1}U = \varphi^{-1}U$ 是 G/G_x 的开子集.

命题 1.8.2 G 为局部紧群, G^0 为 G 的单位元连通分支. 如果存在 G 的开子群 G', 使得 G/G' 是可数的, G'/G^0 是紧集, 局部紧的 Hausdorff 空间 M 是 G 上的齐性空间, 则对任意 $x \in M$, G/G_x, 与 M 同胚.

证明 沿用命题 8.1 的记号, 只需证明 φ 是开映射. 设 $W \subset G$ 是单位元的对称紧邻域. 取可数集 $\{g_n\} \subseteq G$, 使得 $G \subseteq \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} g_n W$, 于是 $M \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} g_n Wx$. 由于 W 紧, 因此 Wx 是 M 中紧集合. M 是 Hausdorff 的, 所有 Wx 是 M 中闭集合. 于是由 Baire 定理可知, 存在 n, 使得 $g_n Wx$ 有内点. 但 $g_n Wx$ 与 Wx 同胚, 所以有 $h \in W$, 使得 hx 是 Wx 的内点, 即 $(Wx)^2 \supseteq h^{-1}Wx \ni x$. 设 V 为 G 的开子集, $g \in V$, 取如上的 W, 使得 $gW^2 \subset V$, 则 $gx \subseteq g(Wx)^2 \subseteq V^x$, 因此 π_x 为开映射, 即 φ 是开映射. □

系理 G, M 如上, 当 G 为紧群, 或 G 只有可数个连通分支时, 都有 M 与 G/G_x 同胚. □

例 1.8.2 $G = SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$,

$$H = \{z \in C | z = x + iy, y > 0\}.$$

对 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $z \in H$, 定义

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

它是 $G \times H \to H$ 的连续映射, 不难证明这个映射在 H 上可迁. $SL_2(\mathbb{R})$ 是连通的. 以 $z = i$ 计算固定子群, 可知它为 $SO_2(\mathbb{R})$. 于是由系理知, H 同胚于 $SL_2(\mathbb{R})/O_2(\mathbb{R})$.

定义 1.8.3 设离散群 Γ 作用在拓扑空间 M 上, 如果 Γ 中任何不同元素组成的序列 $\{\gamma_n\}$, 对任何 $x \in M, \{\gamma_n x\}$ 没有极限, 我们称 Γ 在 M 上的作用是完全不连续的.

定义 1.8.4 设离散群 Γ 作用在拓扑空间 M 上, T 在 M 上的作用的基本区是指 M 的子集 F, 它满足:

(i) $\Gamma(F) = M$;

(ii) $\forall \gamma \in \Gamma, \gamma \neq e, \gamma(F) \cap F = \varnothing$.

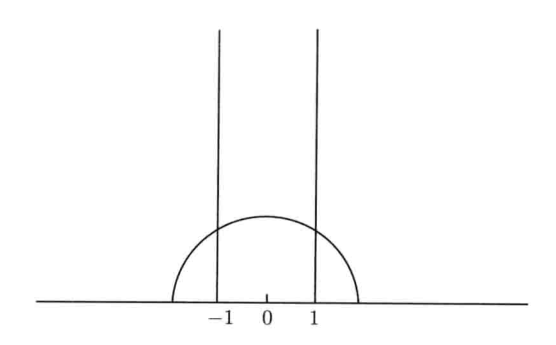
例 1.8.3 取上例中 G 的离散子群

$$\Gamma = SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}) \middle| a, b, c, d, \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Γ 在上半平面 H 上的作用是完全不连续的. 它的基本区是

$$F=\left\{z\middle|z\in H,|\mathrm{Re}z|<\frac{1}{2},|z|>1\right\}$$
$$\bigcup\left\{z\middle|\mathrm{Re}z=-\frac{1}{2},|z|\geqslant 1\right\}$$
$$\bigcup\left\{z\middle||z|=1,-\frac{1}{2}\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant 0\right\}.$$

如下图所示.



1.9　反向极限和拓扑群

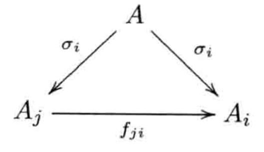
定义 1.9.1　设 $\mathscr{C}$ 是一个范畴, I 是一个偏序集. 对每一个 $i\in I$, $\mathscr{C}$ 中有一个 A_i 与它对应. 同时对每一对指标 $i\leqslant j$, $\mathscr{C}$ 中有一个映射 $f_{ji}:A_j\to A_i$, 使得

(1) 对每个 i, $f_{ji}:A_j\to A_i$ 是恒同映射;

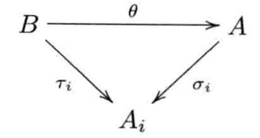
(2) 若 $i\leqslant j\leqslant k$, 则 $f_{ji}f_{kj}=f_{ki}$,

则我们称 $\{A_i,f_{ji}\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个反向系统.

设 $\{A_i,f_{ji}\}$ 是 $\mathscr{C}$ 中一个反向系统, $A\in\mathscr{C}$. 如果对每个 i 都有 $\mathscr{C}$ 中映射 $\sigma_i:A\to A_i$, 且对每对指标 $i\leqslant j$, 图



是交换的, 则我们称 $\{A,\sigma_i\}$ 是 $\{A_i,f_{ji}\}$ 上的一个锥. 设 $\{B,\tau_j\}$ 是 $\{A_i,f_{ji}\}$ 上的另一个锥. 如果存在一个 $\mathscr{C}$ 中的映射 $\theta:B\to A$, 且使对每个指标 i, 图



是交换的, 则称 $\theta:\{B,\tau_i\}\to\{A,\sigma_i\}$ 是锥间的映射.

定义 1.9.2 设 $\{A,\sigma_i\}$ 是 $\{A_i,f_{ji}\}$ 上的一个锥. 如果它有性质: 对任意 $\{A_i,f_{ji}\}$ 的锥, 都存在唯一的上述映射 θ, 则称 $\{A,\sigma_i\}$ 为 $\{A_i,f_{ji}\}$ 的万有锥或反向极限 (或投影极限), 简记为

$$A=\varprojlim A_i.$$

例如取 I 为平凡序, 即 $i\leqslant j$, 当且仅当 $i=j$, 则 $A=\prod\limits_{i\in I}A_i=\varprojlim A_i$, $\sigma_i:A\to A_i$ 就是投影.

命题 1.9.1 在拓扑群范畴中, 反向极限总是存在的.

证明 设 $\{A_i,f_{ji}\}$ 是一个反向系统. 令

$$P=A=\prod_{i\in I}A_i,\quad \pi_i:P\to A_i$$

是直积和投影, 记

$$G^{(j)}=\{a\in P|\forall k,j\leqslant k,有\pi_j a=f_{kj}\pi_k a\}.$$

不难看出, $G^{(j)}$ 是拓扑群. 取

$$A=\bigcap_{j\in I}G^{(j)}=\{a=(a_i)\in P\mid\forall j,k,只要j\leqslant k,则有a_j=f_{kj}a_k\},$$

它是拓扑群. 令 σ_i 为 π_i 在 A 上的诱导, 则 $\{A,\sigma_i\}$ 是 $\{A_i,f_{ji}\}$ 的一个锥.

设 $\{B,\tau_i\}$ 为另一锥, 因对 $j\leqslant k$, 有 $f_{kj}\tau_k=\tau_i$, 故我们可以定义 $\tau:B\to P$, $\tau b=(\tau_i b)$. 且因 $f_{kj}\tau_k b=\tau_i b$, 故 $f_{kj}\pi_k(\tau b)=\pi_i(\tau b)$, 即 $\tau b\in A$. 因此 τ 是 B 到 A 的映射, 有 $\sigma_j\tau=\tau_j$. 因此 τ 是锥间映射, B 是任意锥. 这说明 $\{A,\sigma_i\}$ 为 $\{A_i,f_{ji}\}$ 的万有锥, 即

$$A=\varprojlim A_i.$$ □

命题 1.9.2 设在拓扑群范畴内, 有 $G=\varprojlim G_i$, 则

(1) 如果所有 G_i 皆为 Hausdorff 群, 则 G 亦然;

(2) 如果所有的 G_i 皆为紧 Hausdorff 群, 则 G 亦然;

(3) 如果所有的 G_i 都是完全不连通群, 则 G 亦然.

证明 由命题 1.6.4 和命题 1.7.5 可知, 如果 G_i 是 Hausdorff 的 (或完全不连通), 则 $P=\prod G_i$ 及其子群 G 也是 Hausdorff(或完全不连通) 的. 这就证明了 (1) 和 (3).

如果所有 G_i 是紧的 Hausdorff 群, 由命题 1.5.2 和命题 1.6.4 可知, $\prod G_i$ 是紧 Hausdorff 群. 故只要证明 G 是 $\prod G_i$ 的闭子集即可. 对每一个 j, $G^{(j)}$ 是 Hausdorff

的, $G^{(j)} = \mathrm{Ker}(\pi_j - f_{kj}\pi_k)$ 是闭集, G 是这些闭集之交, 因而是闭集. 这就证明了 (2). □

定义 1.9.3 设 $G, G_i(i \in I)$ 都是拓扑群, 若 $G_i, \forall i \in I$ 都是有限离散群, 且

$$G = \varprojlim G_i,$$

则称 G 为准有限群.

命题 1.9.3 设 G 是拓扑群. 它是准有限的, 当且仅当它是紧的和完全不连通的.

证明 由定义和命题 1.9.2 立得必要性.

下面证明充分性. 设 G 是紧的, 完全不连通群, 它的每个点都是一个连通分支. 由命题 1.7.6 知每点是闭集. 因此它是 Hausdorff 群. 由命题 1.7.8, $e = \mathrm{Comp}(e)$, 是 e 的一切开且闭邻域之交. 对于每个开、闭邻域, 我们可作一个 G 的开正规子群如下.

设 U 是 e 的开、闭邻域, 则 U 是紧集. 由命题 1.4.8, 存在 e 的开邻域 V, 使得 $VU \subseteq U$, 取 W 为 $V \cap V^{-1}$, 则 $W^{-1}U = WU \subseteq U$. 由归纳法可得对一切整数 n, 有 $W^nU \subseteq U$. 因 $e \in U$, 故 $W^n \subseteq U$, 对一切整数 n. 令 $H = \bigcup\limits_{n \in Z} W^n$, W^n 皆是开集, 因此 H 为开集. 显然 H 在乘法下封闭, 因此 H 是 G 的开子群. 由命题 1.4.2 和命题 1.4.6 可得 G/H 是离散的紧空间, 必有 $(G:H) < \infty$. H 的共轭子群的个数等于 H 的中心化子的指数, 它必小于 H 的指数. 于是 $N = \bigcap\limits_{x \in G} x^{-1}Hx$ 是有限交. N 是 G 的开子群, 同理可知 G/N 是离散紧的. 因此 $(G:N) < \infty$. 于是 N 是 G 的开的有有限指数的正规子群.

设 $N_i(i \in I)$ 是所有开的有有限指数的正规子群, 定义偏序: $i \leqslant j \Leftrightarrow N_i \supseteq H_j$. 令 $A_j \to G/N_i$, $f_{ji}: A_j \to A_i$ 为 $xN_j \mapsto xN_i$(当$i \leqslant j$), 则 $\{A_i, f_{ji}\}$ 是一个反向系统, N_i 是开的、有有限指数的. 因此, 对一切 i, A_i 是有限离散群, 反向极限 $A = \varprojlim A_i$ 是准有限群.

下面我们来证明 G 与 A 是拓扑同构的. 记 $\sigma_i: A \to A_i$, 商映射 $\tau_i: G \to A_i$. 不难看出 $\tau_i = f_{ji}\tau_j$. 因此必有 $\tau: G \to A$, 使得 $\sigma_i\tau = \tau_i$. 由于开子群 N_i 必是闭的, 因此 A_i 是 Hausdorff 的, $\forall i \in I$, 于是 A 也是 Hausdorff 的. 又因 G 紧, 因此 τ 一定是闭映射 (命题 1.1.2). 我们只要证明 τ 是单的映射就可证出 G 与 A 是拓扑同构的.

单性: 设 $x \in G$, $\tau(x) = e$, 则 $\tau_i(x) = e_i$, $\forall i \in I$, 即 $x \in \bigcap\limits_{i \in I} N_i$. 由前述 $\bigcap\limits_{i \in I} N_i = \{e\}$, 所以 $x = e$.

满性: 设 $a = (x_iN_i)_{i \in I}$ 是 A 中任一元素. 由于任意 $i, j \in I$, $N_k = N_i \cap N_j$ 是正规子群, 故存在 $x_k \in G$, x_kN_k 是 a 的一个分量. 由反向极限定义, 有 $\sigma_i = f_{ik}\sigma_k$, 作

用到 a 上得到 $x : N_i = x_k N_i \supseteq x_k N_k$. 同理 $x_i N_i \supseteq x_k N_k$. 则 $x_k N_k \subseteq x_i N_i \cap x_i N_i$, G 是紧群, 由命题 1.4.7, 并注意 N_i 是开、闭群, 可知存在 $x \in G$, 使得

$$x \in \bigcap_{i \in I} x_i N_i.$$

于是对一切 i, $xN_i = x_i N_i$, 即 $\tau(x) = a$. □

命题 1.9.4 设 G 是任一个紧群, G^0 表示 G 在 e 处的连通分支, 则

(1) G^0 是连通紧群;

(2) G/G^0 是准有限群;

(3) G^0 是所有 G 是正规开子群之交.

证明 由命题 1.7.6, 1.9.3 立刻得到 (1), (2).

(3) 由命题 1.7.6 可知, G 的所有正规开子群之交包含 G^0. 又因每个开、闭子集都包含有一个正规开子群, 所以一切开、闭子集之交, 即 G^0 包含一切正规开子群之交. 因此二者相等. □

例 考虑 $\mathbb{Z}$, p-adic 拓扑. $p^n\mathbb{Z}$ 构成 0 的基本开邻域组, $\cap p^x\mathbb{Z} = \{0\}$. $\mathbb{Z}$ 是完全不连通的, 但不是紧群 (习题, 分 $p \neq 2$ 和 $p = 2$ 两种情形). 然而从命题 1.9.3 可以知道 $\varprojlim(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$ 是紧群, 它就是 p-adic 整数集 $\mathbb{Z}_p$.

习 题

1. 证明: 离散紧空间必是有限的.

2. 设 θ 为无理数. 证明 $\mathbb{Z}$ 和 $\theta\mathbb{Z}$ 均是 $(\mathbb{R}, +)$ 的闭子群, 但 $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ 不是 $(\mathbb{R}^n, +)$ 的闭子群.

3. 设拓群有闭子集 A, 紧子集 B. 证明 AB 是闭子集.

4. 设 U 为拓扑群 G 的单位元 e 的邻域, 取 $V = U \cap U^{-1}$. 证明 $V = V^{-1}$. 试证: 存在 e 的一个基本邻域组 $\mathscr{J}$, 使得若 $U \in \mathscr{J}$, 则 U 是开集, 且 $U = U^{-1}$.

5. 设 U 为拓扑群单位元 e 的开邻域. 证明存在 e 的开邻域 V, 使得 $V = V^{-1}$, $V^2 \subseteq U$. 取 $x \in \overline{V}$. 证明: $xV \cap V \neq \varnothing$ 且 $x \in VV^{-1}$, 由此可得 $\overline{V} \subseteq U$.

6. 固定拓扑群 G 的单位元 e 的开邻域 U 及 $y \in G$. 证明: 存在 e 的开邻域 V_1, 使得 $V_1^3 \subseteq U$, $V_1 = V_1^{-1}$; 存在 V_2, 使得 $yV_2y^{-1} \subseteq V_1$, $V_2 = V_2^{-1}$; $V_y = V_1 \cap V_2$, 使得 $x \in V_y \cdot y \Rightarrow xV_yx^{-1} \subseteq U$. 现设 C 为 G 的紧子集. 证明: 存在 $y_1, \cdots, y_n \in C$, 使得 $C \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k} \cdot y_k$. 取 $V = C \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$ 则必有 $x \in C \Rightarrow xVx^{-1} \subseteq U$.

7. G 为局部紧拓扑群, C 为 G 的紧子集, U 为包有 C 的开集. 对 $x \in C$, 取 e 的开邻域 W_x 使得 $xW_x \subset U$. 取 e 的开邻域 V_x, 使得 $V_x^2 \subseteq W_x$, $\overline{V}_x$ 为紧集. 取 $x_1, \cdots, x_n \in C$, 使得 $C \subset \bigcup_{k=1}^{n} x_k V_{x_k}$. 令 $V_1 = \bigcup_{k=1}^{n} V_{x_k}$. 证明:

(1) $CV_1 \subseteq U$;

(2) 存在 e 的开邻域 V_2, 使得 $\overline{V}_2$ 是紧集且 $V_2C \subset U$;

(3) 取 $V = V_1 \cap V_2$, 证明 $\overline{CV \cup VF}$ 是紧集.

8. 设 U 是单位元的开邻域, 且 $U = U^{-1}$. 试证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ 是开且闭的子群.

9. G 是一个拓扑群, E 是所有包含 e 的闭子集之交. 证明: E 是 G 的正规子群, 因而 G/E 是 Hausdorff 群.

10. A, B 是拓扑群 G 的子集, x, $y \in G$. 证明:

(1) $\overline{A}\,\overline{B} \subseteq (\overline{AB})$;

(2) $(\overline{A})^{-1} = (\overline{A^{-1}})$;

(3) $x\overline{A}y = \overline{xAy}$;

(4) 若 A 是 G 的子群, 则 $\overline{A}$ 是 G 的子群.

11. 设 G 为 Hausdorff 拓扑群. 考虑映射 $\alpha : G \times G \to G$, $(a, b) \to aba^{-1}b^{-1}$. 设 $H = \alpha^{-1}(e)$, A, B 是 G 的子集, 满足 $AB \subset H$. 试证: (1)H 是闭集; (2)$\overline{A} \times \overline{B} \subset H$.

12. G 是一个拓扑群, H 是它的紧子群, 则商映射 $G \to G/H$ 是闭映射.

13. 设 $G = \prod_i G_i$ 是拓扑群乘积, $H_i \lhd G_i$. 证明 $H = \prod_i H_i \lhd G$, 且 $G/H \cong \prod_i G_i/H_i$. 由此可得

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n} \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n.$$

14. $G = A \times B$ 是拓扑群 A, B 之积. 记

$$A_0 = \{(a, e_B) \in G | a \in A\},$$

其中 e_B 是 B 中单位元. 则 $A_0 \lhd G$, $A_0 \cong A$ 且 $G/A_0 \cong B$.

15. 证明: $\mathbb{C}^* = \mathbb{R}_+^\times \times S^1$.

16. 证明: $GL_n(\mathbb{C})$ 是连通的.

17. 证明: $GL_n(\mathbb{R})$ 有两个连通分支.

18. 举例说明完全不连通空间的商空间未必是完全不连通的.

19. 举例说明完全不连通群的商群未必是完全不连通的.

20. 证明: 一个有限拓扑群若是连通的则必具有平凡拓扑.

21. (无限 Galois 群) 设 K 是域, L 是 K 的 Galois 扩张, 它不一定是有限维的. $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ 是 L 的保持 K 元素不动的自同构形成之群. 设 $L_i \subset L$, L_i 是 K 的有限维 Galois 扩张. 子群 $Ni = \mathrm{Gal}(L/L_i)$ 与 L_i 相对应. $N_i \lhd G$, $G/N_i \cong \mathrm{Gal}(L_i/K)$ 是有限群, 取 N_i 为 e 的基本邻域组. 证明: G 是拓扑群. 在拓扑群集合 $\{G/N_i\}$ 中以包含关系定义偏序: $i \leqslant j \Leftrightarrow N_i \supseteq N_i$, 并定义 $f_{ji} : G/N_j \to G/N_i$, $gN_j \mapsto gN_i$,

则 $\{G/N_i, f_{ji}\}$ 构成反向系统, G 是它的一个锥: $\tau_i: G \to G/N_i$, $\tau_i(g) = gN_i$. 如果 $i \leqslant j$, 则 $f_{ij}\tau_i(g) = gN_i = \tau_i(g)$, 即 $f_{ji}\tau_i = \tau_i$. 证明

$$G = \varprojlim G/N.$$

22. 设 G 为拓扑群, H, K 为 G 的子群. $K \lhd G$, ρ 是 $G \to G/K$ 的商同态. 对 $h \in H$, 设 $\tau(hK) = h(H \cap K)$, $\tau^{-1}(h(H \cap K)) = hK$. 试证:

(1) 如果在 HK/K 上取商拓扑, 在 $\rho(H)$ 上取由 G/K 诱导的拓扑, 则 HK/K 与 $\rho(H)$ 拓扑同构.

(2) 若在 HK/K 和 $H/H \cap K$ 上都取商拓扑, U 为 HK/K 的开子集, 则 $\tau(U)$ 为 $H/H \cap K$ 的开子集.

(3) 若再设 H 是局部紧与 σ-紧, K 闭以及 HK 是局部紧, 则有

(i) $\rho|_H : H \to HK/K$ 是开同态;

(ii) V 为 $H/H \cap K$ 的开子集 $\Rightarrow \tau^{-1}(V)$ 为 HK/K 的开子集;

(iii) HK/K 与 $H/H \cap K$ 拓扑同构.

(注意: HK/K 的开子集是

$$\{hK | h \in X, \quad X \subset H, XK \text{ 是 } HK \text{ 的开子集}\},$$

HK 具有从 G 所诱导的拓扑. $H/H \cap K$ 的开子集是

$$\{h(H \cap K) | h \in Y, Y \subset H, Y(H \cap K) \text{是 } H \text{ 的开子集}\}).$$

23. 设 G 为拓扑群, $N_1, \cdots, N_k$ 为 G 的正规子群, 满足 (1)$G = N_1 \cdots N_k$; (2)$(N_1 \cdots N_j) \cap N_{j+1} = \{e\}$, $j = 1, 2, \cdots, k-1$; (3)N_i 具有诱导拓扑, 若 S_i 为 N_i 单位元开邻域, 则 $S_1 S_2 \cdots S_k$ 为 G 的单位元开邻域. 试证 $G \cong N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$.

24. 设 G 是正则局部可数紧群, $N_1 \cdots N_k$ 为 G 的局部紧, σ-紧正规子群, 满足 (1)$G = N_1 \cdots N_k$; (2)$(N_1 \cdots N_k) \cap N_{j+1} = \{e\}$, $j = 1, 2, \cdots, k-1$, 则 $N_1 \times \cdots \times N_k$ 与 G 拓扑同构.

25. 设 G 为拓扑群, H 为 G 的正规闭子群, $\varphi : G \to H$ 是连续同态, 而且 $h \in H \Rightarrow \varphi(h) = h$, $L = \varphi^{-1}(e)$. 证明: (1) 由 $x \in G$ 可得 $x = \varphi(x)(\varphi(x^{-1})x) \in HL$, 于是 $G = HL$; (2)$H \cap L = \{e\}$; (3) 若 U_1, U_2 是 G 的单位元开邻域, 则存在 G 的单位元开邻域 W 使得 $W \subset (U_1 \cap H)(U_2 \cap L)$; (4)$G \cong H \times L$.

第 2 章　拓扑群上的积分

一个局部紧 Hausdorff 拓扑空间自然有 Borel 测度、对一个局部紧拓扑群 G 我们会问这个 Borel 测度 μ 与群的运算的关系. 比如, 设 S 为 G 的一个可测度子集, $g \in G$, 我们会要求 μ 满足条件 $\mu(gS) = \mu S$. 也就是说: 用 g 把 S 移动后, S 的 "大小"(测度) 不变. 本章目的就是要构造这种不变测度.

2.1　测　　度

设 X 是一个局部紧的 Hausdorff 拓扑群空间, f 是 X 上的一个连续函数, 定义 f 的支集 $\mathrm{supp}(f)$ 为 $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ 的闭包. 记

$$C_c(X) = \{f : X \to C | f \text{ 连续}, \mathrm{supp}(f) \text{ 是 } X \text{ 的紧子集}\}.$$

因为 $\mathrm{supp}(f)$ 是闭子集, 显然

$$C_c(X) = \{f : X \to C | f \text{ 连续}, \mathrm{supp}(f) \text{ 是} \subseteq C, C \text{ 是 } X \text{ 的紧子集}\}.$$

不难看出, $C_c(X)$ 中元素在加法和数乘下封闭, 因此它是一个向量空间. 我们先证明下面的引理以说明 $C_c(X)$ 不是零空间.

命题 2.1.1(Урысон引理)　设 X 是非空局部紧 Hausdorff 空间, $C \subseteq U \subseteq X$, C 为紧集, U 为开集, 则必存在一个连续函数 $f : X \to \mathbb{R}$, 使得

(1) $f(x) = 1$, 对一切 $x \in C$;

(2) $f(x) = 0$, 对一切 $x \notin U$;

(3) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 对一切 $x \in X$;

(4) $\mathrm{supp}(f)$ 紧且包含在 U 中.

证明　由命题 1.1.6, 存在 C 的一个开邻域 Y, $\overline{Y}$ 是紧集, 且包含在 U 中. 记 $C = C(1)$, $\overline{Y} = C(0)$. 又依同一命题, 在 $C(0)$ 和 $C(1)$ 之间存在 C 的紧邻域, 记为 $C\left(\dfrac{1}{2}\right)$. 在 $C(0)$ 和 $C\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 之间存在 C 的紧邻域, 记为 $C\left(\dfrac{1}{4}\right)$, 在 $C\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $C(1)$ 之间存在 C 的紧邻域, 记为 $C\left(\dfrac{3}{4}\right)$, 等等. 继续此过程, 我们可得到一系列 $C(\theta)$, $\theta = \dfrac{i}{2^n}$, $0 \leqslant i \leqslant 2^n$. 由命题 1.1.2, 这些 $C(\theta)$ 皆为闭集. 定义

$$C(\alpha) = \bigcap_{\theta \leqslant \alpha} C(\theta),$$

其中 θ 形如 $i/2^n$, $C(\alpha)$ 仍是闭集. $C(\alpha) \subseteq C(1)$, $C(1)$ 紧, 故 $C(\alpha)$ 为紧. 定义

$$C(\alpha) = \begin{cases} X, & 当\ \alpha < 0, \\ \varnothing, & 当\ \alpha > 1. \end{cases}$$

显然, 若 $0 \leqslant \alpha < \beta$, 则 $C(\beta)$ 是 $C(\alpha)$ 的紧邻域, 现在定义一个函数 $f: X \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sup\{\alpha | x \in C(\alpha)\}.$$

不难看出, 若 $x \notin C(0)$, 则 $f(x) = 0$; 若 $x \in C(1)$, 则 $f(x) = 1$. 对一切 $x \in X$ 都有 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. 于是可知 $\mathrm{supp} f(x) \subseteq C(0)$.

下面要证明 f 连续, 即要证明开集的原像为开集. 这只需证明: 对任二实数 $\gamma < \beta$, 集合

$$V = \{x \in X | \gamma < f(x) < \beta\}$$

为开集, V 可写为

$$V = \{x | f(x) > \gamma\} \bigcap (X \backslash \{x | f(x) \geqslant \beta\}).$$

现分别证明右边两集合为开集. 由于

$$f(x) \geqslant \beta \Leftrightarrow \sup\{\alpha | x \in C(\alpha)\} \geqslant \beta \Leftrightarrow x \in \bigcap_{x<\beta} C(\alpha),$$

故 $\{x | f(x) \geqslant \beta\}$ 是闭集. 于是, 其补集为开集, $f(x) > \gamma \Leftrightarrow \sup\{\alpha | x \in C(\alpha)\} > \gamma \Leftrightarrow \exists \alpha > \gamma$, 使得 $x \in C(\alpha) \Leftrightarrow \exists \alpha' > \gamma$, $x \in C(\alpha')$ 内部 $\Leftrightarrow \{x | f(x) > \gamma\}$ 为开集. 因此 f 为连续函数. □

由此引理可知, 对于局部紧、非空的 Hausdorff 空间中任一紧集合 K, 只要 K 的内集非空, 则有非零函数 f, 使得 $\mathrm{supp} f(x) \subseteq K$, 我们记

$$C_c(X, K) = f\{f \in C_c(X) | \mathrm{supp}(f) \subseteq K\},$$

它是 $C_c(X)$ 的子空间. 我们可以在 $C_c(X, K)$ 上定义范数. 设 $f \in C_c(X, K)$, 定义

$$\|f\|_k = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

如果它是复值函数, 我们取复数的绝对值为模. 对于此范数, $C_c(X, K)$ 成为拓扑向量空间.

我们记

$$C_c^+(X) = \{f \in C_c(X) | f \geqslant 0\ 且\ f \neq 0\}^{1)},$$
$$C_c^+(X, K) = \{f \in C_c^+(X) | \mathrm{supp}(f) \subseteq K\}.$$

1) 我们约定: “$Z \in \mathbb{C}, Z \geqslant 0$” 意思是 “$Z \in \mathbb{R}, Z \geqslant 0$”.

定义 2.1.1　局部紧 Hausdorff 空间 X 上的一个正测度是指一个线性函数 $\mu : C_c(X) \to C$, 且对于 $f \geqslant 0$, 有 $\mu(f) \geqslant 0$.

例 2.1.1　$X = \mathbb{R}$, 设 $a(x) \in C_c^+(\mathbb{R})$, 则定义

$$\mu(f) = \int_{-\infty}^{\infty} a(x) f(x) dx$$

是一个正测度.

注　这样定义的测度和一般常见的测度理论 (例如 [Zhu 86]) 是一样的. 设 $(X, \mathscr{A}, m)$ 是测度空间, 其中 $\mathscr{A}$ 是 X 的 σ 代数, m 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的正测度, 则可定义积分 $\int_x f dm$. 当 X 是局部紧 Hausdorff 空间时, 下面的定理说明了 $C_c(X)$ 上的正线性泛函和 X 上的抽象测度的关系 (证明可参阅 [Rud 87]).

Riesz 表示定理　设 X 是局部紧 Hausdorff 空间, μ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函, 则存在 X 的 σ 代数 $\mathscr{A}$, 及 $\mathscr{A}$ 的正测度 m, 使得对 $f \in C_c(X)$, 有

$$\mu(f) = \int_x f dm.$$

并且, 如果 K 是 X 的紧子集, 则

$$m(K) = \int_K dm < \infty.$$

定义 2.1.2　设 X, Y 均为局部紧拓扑空间, μ 为 X 上正测度. 称映射 $\varphi : X \to Y$ 为 μ 的一个固有映射, 如果对任意 $f \in C_c(Y)$, 有

$$\int_x |f(\varphi(x))| d\mu(x) < \infty.$$

这时 $f \mapsto \mu(f \cdot \varphi)$ 是 Y 上的正测度, 记为 $\varphi_*(\mu)$.

例 2.1.2　如果 $\varphi : X \to Y$ 满足: 对任意 Y 中紧集 K, $\varphi^{-1}(K)$ 是 X 中紧子集, 这时我们称 φ 为连续固有映射. 此时对任意 μ, φ 都是它的一个固有映射. 事实上, 若 $f \in C_c(Y, K)$, 则 $f \cdot \varphi \in C_c(X, \varphi^{-1}(K))$.

命题 2.1.2　设 μ 为局部紧 Hausdorff 空间 X 中的正测度, K 为 X 中的紧集. 则相对于范数 "$\|\cdot\|_K$", μ 对 $C_c(X, K)$ 中实值函数的作用是连续的.

证明　从第 1 章命题 1.1.6 可知存在紧集 N, 使 $K \subseteq N$. 再从命题 2.1.1 可知存在实值连续函数 f, 满足

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in K, \\ 0, & \text{若 } x \notin N, \end{cases}$$

且

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1,$$
$$\mathrm{supp}(f) \subseteq N.$$

对任意实函数 $g \in C_c(X,K)$, 显然有

$$-\|g\|_K f \leqslant g \leqslant \|g\|_K f.$$

μ 是正测度, 故保持次序

$$-\|g\|_K \mu(f) \leqslant \mu(g) \leqslant \|g\|_K \mu(f),$$

即

$$|\mu(g)| \leqslant \mu(f)\|g\|_K.$$

因此当 $\|g\|_K \to 0$ 时, $\mu(g) \to 0$. □

显然 $C_c(X) = UC_c(X,K)$, 其中的并是对 X 的所有紧子集 K 取的. 在 $C_c(X)$ 上, 我们取由 $C_c(X,K)$ 所决定的正限拓扑 (见 [XY 86], 第二章第 6 节). 这就是说, 对于这个拓扑, 线性泛函 $\mu : C_c(X) \to C$ 是连续的充要条件是: 对所有紧子集 K, 限制 μ 所得的线性泛函 $\mu|_K : C_c(X,K) \to C$ 是连续的.

定义 2.1.3　设 X 是局部紧集 Hausdorff 空间, $\mu : C_c(X) \to C$ 是线性泛函. 如果对任意紧集 $K \subseteq X$, 存在非负实数 a_K, 使得 $f \in C_c(X,K) \Rightarrow |\mu(f)| \leqslant a_K\|f\|_K$, 则称 μ 为 X 上的 (复) 测度.

我们有时称 $\mu(f)$ 为 f 在 X 上相对于 μ 的积分, 并记为

$$\int_X f(x)d\mu(x),$$

或

$$\int_X f d\mu, \qquad \int_X f(x)dx.$$

当积分空间不易引起混淆时, 可以将其略去.

例 2.1.3　取定 $x \in X$, 映射 $\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$ 是 X 上的测度. 我们称 ε_x 为 x 点的 Dirac 测度.

命题 2.1.3　设 μ 是定义在 $C_c^+(X)$ 上的正值函数, 保持加法和数乘, 则 μ 可以唯一地扩充为 x 的测度.

证明　首先, 不难看出 μ 可以唯一地扩充到实值函数上去, 因为任意实值函数可表为两个 $C_c^+(X)$ 中元素之差, 而且从命题 2.1.2 的证明中可以看出对于任意

一个紧集合 K, 存在实数 $a_k > 0$, 使得只要实值函数 f 满足 $\mathrm{supp}(f) \subseteq K$, 便有 $|\mu(f)| \leqslant a_K \|f\|$.

现在考虑任意 $f \in C_c(X)$. 我们可以写成

$$f = f_1 + i f_2,$$

其中 f_1, f_2 是实值函数. 易见 $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq \mathrm{supp}(f), i = 1, 2$. 我们将 μ 扩充到 f 上:

$$\mu(f) = \mu(f_1) + i\mu(f_2),$$

对于任意一个包含 $\mathrm{supp}(f)$ 的紧集合 K, 它自然也包含 $\mathrm{supp}(f_i)$, $i = 1$, 2. 于是, 存在实数 $a_K > 0$, 使

$$|\mu(f_i)| \leqslant a_K \|f_i\|_K, \quad i = 1, 2.$$

这样

$$|\mu(f)| = \left(|\mu(f_1)|^2 + |\mu(f_2)|^2\right)^{1/2} \leqslant a_K \left(\|f_1\|_K^2 + \|f_2\|_K^2\right)^{1/2} = a_K \|f\|_K.$$

于是, μ 便是 $C_c(X)$ 上的测度, 唯一性是显然的. □

设 λ, μ 是 X 上的测度, 则 $\lambda + \mu$ 和 $a\lambda$ $(a \in C)$ 也是 X 上的测度. 故全体 X 上的测度是 C 的向量空间, 我们记它为 $M(X)$.

设 $\mu \in M(X), f \in C_c^+(X)$. 取

$$|\mu|(f) = \sup_{\substack{0 \leqslant |g| \leqslant f \\ g \in C_c(X)}} |\mu(g)|.$$

把 $|\mu|$ 线性扩张到 $C_c(X)$, 则 $|\mu|$ 是 X 上满足性质: $f \in C_c(X) \Rightarrow |\mu(f)| \leqslant |\mu|(|f|)$ 的最小正测度.

称 $\mu \in M(X)$ 是有界的, 如果存在实数 a, 使得对于一切 $f \in C_c(X)$, 都有 $|\mu(f)| \leqslant a\|f\|$. 此处 $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. 显然 μ 有界 $\Leftrightarrow |\mu|$ 有界. 如果 μ 有界, f 有界且连续, 则 $\displaystyle\int |f| d\mu < \infty$.

X 的全体有界测度组成 $M(X)$ 的子空间, 记为 $M^1(X)$. 在这个空间中可以引入范数

$$\|\mu\| = \sup_{f \in C_c(x)} \frac{|\mu(f)|}{\|f\|}.$$

显然, $M^1(X)$ 是 $C_c(X)$ 的对偶空间. 所以它对于范数 $\|\mu\|$ 是完备的 (见 Dieudonné, *Elements d'Analyse*, Vol.I (5.7.3)).

如果 $\mu \in M(X)$, $\varphi : X \to Y$ 是 $|\mu|$-固有映射, 并有分解

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4),$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 均为正测度, 则可以定义

$$\varphi_*(\mu) = \varphi_*(\mu_1) - \varphi_*(\mu_2) + i(\varphi_*(\mu_3) - \varphi_*(\mu_4)).$$

如果 $\varphi : X \to Y$ 连续, $\mu \in M^2(X)$, 则 φ 是 μ-固有映射. 因为 $f \cdot \varphi$ 是有界连续的, 进一步, 我们有

$$\|\varphi_*(\mu)\| = \sup_{g \in C_c(Y)} \frac{|\varphi_*(\mu)(g)|}{\|g\|} \leqslant \sup_{g \in C_c(Y)} \frac{|\mu(g \cdot \varphi)|}{\|g \cdot \varphi\|} \leqslant \|\mu\|,$$

因此, $\varphi_*(\mu) \in M^1(Y)$.

设 X 是 Y 的闭子集, μ 是 X 的测度. 对于 $f \in C_c(Y, K)$, 限制 $f|_X \in C_c(X, K \bigcap X)$. 这样存在常数 C_K, 使得对于 $f \in C_c(Y, K)$, 有

$$|\mu(f|_X)| \leqslant C_k \sup_{x \in X} |f(x)| \leqslant C_K \|f\|.$$

因此 $f \mapsto \mu(f|_X)$ 是 Y 上的测度. 这个测度便是 $i_*(\mu)$, 其中 $i : X \to Y$ 是嵌入映射, 我们称 $i_*(\mu)$ 为 μ 在 Y 上的扩张.

设 $\mu \in M(X)$, 测度 μ 的支集 $\mathrm{supp}(\mu)$ 是指满足下列条件的最小闭集 S:

$$f \in C_c(X) \text{ 且 } \mathrm{supp}(f) \subseteq (X \backslash S) \Rightarrow \mu(f) = 0.$$

显然, 如果 μ, ν 是正测度, 则

$$\mathrm{supp}(\mu + \nu) = \mathrm{supp}(\mu) \bigcup \mathrm{supp}(\nu).$$

X 的全体有紧支集的测度记为 $M_c(X)$. 全体 X 上的连续函数记为 $C(X)$. 在 $C(X)$ 上取紧收敛拓扑. 可以证明, $M_c(X)$ 是 $C(X)$ 的对偶空间 (见 [Die 69], Vol.II (13, 19, 3)).

设 μ 是空间 X 上的正测度, 取正实数 p $(0 < p < \infty)$. 设 f 是 X 上的复值可测函数. 定义

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/2}.$$

如果 $\|f\|_p < \infty$, 则称 f 是一个 p 次可积函数, $\|f\|_p$ 为 f 的 L^p 范数. 全体 p 次可积函数记为 $L^p(X, \mu)$, 或 $L^p(X)$. 可以证明, 对 L^p 范数, $L^p(X, \mu)$ 是完备距离空间 (见 [Rud 87] 定理 3.11). 当 $p = 2$ 时, $L^2(X)$ 对内积

$$(f, g) = \int_X f \overline{g} d\mu, \quad f, g \in L^2(X)$$

构成 Hilbert 空间. 所以 Schwarz 不等式

$$|(f, g)| \leqslant \|f\|_2 \|g\|_2,$$

及三角形不等式

$$\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2$$

均成立.

可以推广 Schwarz 不等式. 设 $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, f, g 均为正值可测函数. 则有

Hölder 不等式:

$$\int_X fg d\mu \leqslant \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Minkowski 不等式:

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}.$$

其证明参看 [Rud 8] 中定理 3.4. 所以如果 $f, g \in L^p(X)$, $h \in L^q(X)$, 则有

$$\|fh\| \leqslant \|f\|_p \|h\|_q,$$

及

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

当 X 是局部紧 Hausdorff 空间及 $1 \leqslant p < \infty$ 时, $C_c(X)$ 是 $L^p(X)$ 的稠密子集 ([Rud 87] 中定理 3.14). 若 $\mu \in M(X)$, $g \in L^1(X,\mu)$, 则 $f \mapsto \int_x fg d\mu$ 定义了一个测度 $g \cdot \mu$, 而且

$$\|g \cdot \mu\| = \int_x |g| d|\mu|.$$

因此, 可以把 $L^1(X,\mu)$ 看作 $M^1(X)$ 的子空间.

关于乘积测度, 我们有下面十分重要的基本定理.

Fubini 定理　设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是 σ-紧测度空间, 则有

(i) 如果 $f \in L^1(\mu \times \nu)$, 则对几乎所有的 $y, x \mapsto f(x,y) \in L^1(\mu)$, $y \mapsto \int_X f(x,y) d\mu(x) \in L^1(\nu)$; 对几乎一切 $x, y \mapsto f(x,y) \in L^1(\nu)$, $x \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y) \in L^1(\mu)$, 而且

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) d\mu(x)\right) d\nu(y) = \int_{X\times Y} f(x,y) d(\mu\times\nu).$$

(ii) 设 $f(x,y)$ 是 $\mu \times \nu$ 可测函数. 如果对几乎所有 $x, y \mapsto f(x,y) \in L^1(\nu)$, $x \mapsto \int_Y |f(x,y)| d\nu(y) \in L^1(\mu)$, 则 $f \in L^1(\mu \times \nu)$.

此定理证明可在很多书中查到, 如 [Rud 87] 中的 §7.8 或 [Zhu 86]§5.2 等.

2.2 不变测度

本节假设 G 是一个局部紧拓扑群, 则我们可以将 G 看作是 $C_c(G)$ 上的变换群. 设 $s \in G$, 对 $f \in C_c(G)$, 定义

$$(sf)(x) = f\left(s^{-1}x\right),$$

我们称它为 f 的左平移. 仍设 e 是 G 的单位元. 对 $t \in G$, 显然有

$$ef = f,$$
$$(st)f = s(tf).$$

命题 2.2.1 设 G 为任意拓扑群, $f \in C_c(G)$, 则 f 在 G 中一致连续, 即对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 G 的单位元的对称开邻域 V, 使得对于 $x, y \in G$, 只要 $x^{-1}y \in V$, 便有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

证明 设 C 为 f 的紧支集. 由 f 的连续性, 对任意 $x \in C$, 开集 $\{f(y)|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2\}$ 的原像是一个包有 x 的开集. 因此, 它包有一个 x 的基本邻域 $xN(x)$, $N(x)$ 是 e 的一个基本开邻域, 它使得当 $y \in xN(x)$ 时, 有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2.$$

由命题 1.3.1, 知存在 e 的对称开邻域 $M(x) \subseteq N(x)$, 且满足 $M(x)^2 \subseteq N(x)$, 由 C 的紧性, 存在有限多个 $x_1, \cdots, x_n \in C$, 使得

$$\bigcup_{t=1}^{n} x_i M(x_i) \supseteq C.$$

令

$$V_1 = \bigcap_{t=1}^{n} M(x_i).$$

V_1 仍为 e 的对称开邻域. 设有 $xy^{-1} \in V_1$. 如果 x, y 皆不属于 C, 则 $f(x) = f(y) = 0$, 这时, 不等式当然成立. 设 x, y 两者之一属于 C, 无妨设 x 属于 C, 则存在 t, 使得 $x \in x_i M(x_i)$. 于是由 $x^{-1}y \in V$, 得

$$y \in xV_1 \subseteq x_i M(x_i) V_1 \subseteq x_i M(x_i)^2 \subseteq x_i N(x_i).$$

因此, 有

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon/2,$$
$$|f(y) - f(x_i)| < \varepsilon/2,$$

即

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

同理, 对于 xy^{-1} 的情形, 可取 x 的邻域组形如 $N(x)x$, 则可如上证明得到 V_2, 使得当 $xy^{-1} \in V_2$ 时, 有 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, 取 $V = V_1 \bigcap V_2$ 即可. □

命题 2.2.2 设 G 是局部紧群, H 是 G 的闭子群, α 是 H 上的测度, $f: G \to C$ 是连续函数. 设 $\mathrm{supp}(f)$ 或 $\mathrm{supp}(\alpha)$ 是紧集, 则

$$s \mapsto \int_H f(st)d\alpha(t),$$

及

$$s \mapsto \int_H f(ts)d\alpha(t)$$

均为 G 上的连续函数.

证明 只需对第一个积分给出证明, 另一情况是类似的. 即只需要证明: 对 $s_0 \in G$, s_0 的紧邻域 V_0 及任给 $\varepsilon > 0$, 存在 s_0 的邻域 $V \subset V_0$, 使得对所有 $s \in V$, 有

$$\left| \int_H (f(st) - f(s_0t))d\alpha(t) \right| < \varepsilon.$$

若 $K = \mathrm{supp}(f)$ 是紧集, 取 $L = V_0^{-1}K \bigcap H$, 则对 $\varepsilon \in V_0$, 有

$$\int_H (f(st) - f(s_0t))d\alpha(t) = \int_L (f(st) - f(s_0t))d\alpha(t).$$

由于 f 是一致连续的, 所以存在单位元 e 的邻域 W, 使得对所有 $t \in H$, $(st)(s_0t)^{-1} = ss_0^{-1} \in W$, 有

$$|f(st) - f(s_0t)| < \varepsilon/|\alpha|(L),$$ [1]

则 $V = V_0 \bigcap W$ 便是所求的邻域.

另一方面, 如果 $C = \mathrm{supp}(\alpha)$ 是紧集, 则

$$\int_H (f(st) - f(s_0t))d\alpha(t) = \int_C (f(st) - f(s_0t))d\alpha(t).$$

如果 $t \in C$, $s \in V_0$, 则 st 在紧集 V_0C 内, 函数 f 在 V_0C 上是一致连续函数, 所以可取单位元邻域 W_1, 使得对 $t \in C$, $ss_0^{-1} \in W_1$, 便有

$$|f(st) - f(s_0t)| \leqslant \varepsilon/|\alpha|(C).$$

1) $|\alpha|(L)$ 表示 $\int_L d|\alpha|(t)$, 当 L 紧时, 由 Riesz 表示定理, 这是有意义的.

则 $V = V_0 \bigcap W_1$ 便是所求邻域. □

定义 2.2.1　G 是一个局部紧 Hausdorff 拓扑群, 一个 (左)Harr 测度是指一个正测度 μ, 它在左平移之下不变, 即 $\mu(f) = \mu(sf)$, 对一切 $s \in G$.

此时, 我们也称 μ 是 G 上的一个 (左) 不变测度, 或 Haar 积分、不变积分.

左不变性可简记为 $d(st) = dx$.

本章最重要的结论是

定理 2.2.1(Haar)　在一个局部紧的 Hausdorff 拓扑群上存在一个左不变 Haar 测度 μ, $\mu \neq 0$, 而且除了相差一个正实数因子外, μ 是唯一的.

我们将在下一节证明这个定理.

下面我们先介绍一些常见的群上的积分作为 Haar 积分的例子.

例 2.2.1　$(\mathbb{R}^n, +)$, 它的 Haar 积分就是 Lebesgue 积分

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维向量空间, $e_1, \cdots, e_n$ 为 V 的基底, 则有同构 $I : V \to \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$. 每个 V 上的函数 f 定义了 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 fI^{-1}. 定义

$$\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(I^{-1}(x_1, \cdots, x_n)\right) dx_1 \cdots dx_n.$$

这就是 V 上的 Haar 积分. 它可简写为

$$\mu(f) = \int f(x)dx.$$

设 T 为线性变换 $V \to V$, $\det T \neq 0$, 我们有

$$\int f(T^{-1}x)dx = |\det T| \int f(x)dx.$$

例 2.2.2　设 T 是绝对值为 1 的复数所成的乘法群, 它是紧群. 我们有映射 $r : \mathbb{R} \to T$, $r(x) = e^{2\pi ix}$. 它是映上的, 且是一个覆盖映射. 一般地, 有 $\mathbb{R}^n$ 到 T^n 的覆盖映射

$$r(x_1, \cdots, x_n) = (e^{2\pi ix_1}, \cdots, e^{2\pi ix_n}).$$

因此每个定义在 T^n 上的函数 f, 决定了 $\mathbb{R}^n$ 上一个 (对每个 x_i) 周期为 1 的函数 fr, 定义

$$\mu(f) = \int_P f(r(x_1, \cdots, x_n))dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

其中

$$P = \{(x_1, \cdots, x_n) | 0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

右方是一般的 Lebesgue 积分. 这就是 T^n 的 Haar 积分. 现在我们来证它的左不变性.

设

$$\begin{aligned}
y &= \left(e^{2\pi i s_1, \cdots, e^{2\pi i s_n}}\right) \in T^n,\\
yf(x) &= f\left(y^{-1}x\right),\\
\mu(yf) &= \int_P f\left(y^{-1}r(x_1, \cdots, x_n)\right) dx_1 \cdots dx_n\\
&= \int_P f(r(x_1 - s_1, \cdots, x_n - s_n))dx_1 \cdots dx_n\\
&= \int_{P-y} f(r(x_1, \cdots, x_n))dx_1 \cdots dx_n,
\end{aligned}$$

其中

$$P - y = \{(x_1 \cdots x_n)| - s_i \leqslant x_i \leqslant 1 - s_i,\ i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

由 f 的周期性, 它在 P 上积分与在 $P - y$ 上积分相等. 因此

$$\mu(yf) = \mu(f).$$

例 2.2.3 G 是一个任意离散群.

$$C_c(G) = \{f | f : G \to C\text{连续}, f \text{ 除了有限点外皆为 } 0\}.$$

定义

$$\mu(f) = \sum_{x \in G} f(x).$$

它显然是 G 上不变测度.

$L^1(G) = \left\{f \middle| f \text{ 具有可数支集 } S, \sum_{x\in S} |f(x)| < +\infty\right\}$. 特别地, 当 $G = \mathbb{Z}$ 时, 有

$$L^1(\mathbb{Z})\left\{\underline{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} | \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < +\infty\right\},$$

$$\mu(\underline{a}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n.$$

例 2.2.4 一般线性群 $G = GL_n(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的开子集. 由例 2.2.1, $\mathbb{R}^{n^1}$ 的 Haar 积分可诱导为 $GL_n(\mathbb{R})$ 的 Haar 积分 (见后面 4.11 节). 我们将这个积分记为 dT.

现在我们要表出 G 作为乘法群的 Haar 积分, 设 $A,\ T\in GL_n(\mathbb{R})$. 作映射

$$L_A: T\to AT.$$

不难验证, 作为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 上的线性变换 L_A, 其矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix}$$

因此 $\det L_A=(\det A)^n$.

设 $f\in C_c(G)$. 考虑

$$\int_G u(T)f(T)dT,$$

其中 $u(T)$ 待定. 希望这个积分左不变, 即对 $S\in G$, 有

$$\int_G u(T)f(S^{-1}T)dT=\int_G u(T)f(T)dT.$$

由例 2.2.1, 可知

$$\begin{aligned}\int_G u(T)f\left(S^{-1}T\right)dT &= \int_G u\left(SS^{-1}T\right)f\left(S^{-1}T\right)dT \quad (令T_1=S^{-1}T)\\ &= |\det S|^n\int_G u(ST_1)f(T_1)dT_1.\end{aligned}$$

我们希望, 对任意 $S\in G$, 有

$$u(T)=|\det S|^n u(ST).$$

令 $S=T^{-1}$, 得

$$u(T)=|\det T|^{-n}u(I),$$

$u(I)$ 为常数. 故设

$$u(T)=|\det T|^{-n}$$

即可. 因此,

$$\mu(f)=\int_G\frac{f(T)}{|\det T|^n}dT$$

是 G 的 Haar 积分.

例 2.2.5 V 是 n 维实向量空间.

$$\begin{aligned} G = GA_n(V) &= \{V\text{上的可逆仿射变换}\} \\ &= \{(t,T): x \mapsto t + Tx | t \in V,\ T \in GL_n(V)\} \\ &\cong V \times GL_n(V), \end{aligned}$$

它是局部紧的, 又是 $V \times L(V)$ 中的开集 (记 $L(V)$ 为 V 上 n 维线性变换全体所成的加法群, 它同构于 $\mathbb{R}^{n^2}$). 因此, $V \times L(V)$ 的测度可诱导到 G 上. 分别以 dt, dT 记 V 和 $L(V)$ 的 Haar 测度, 我们求 G 作为乘法群的 Haar 测度. 仍用待定法, 设 $f \in C_c(G)$. 令

$$\mu(f) = \int_G u(t,T) f(t,T) dt dT,$$

其中 $u(t,T)$ 待定. 设 $S = (a, A) \in G$,

$$\mu(sf) = \int u(t,T) f((a,A)^{-1}(t,T)) dt dT.$$

令 $(a,A)^{-1}(t,T) = (x,M)$, 则

$$t = a + Ax, \quad T = AM.$$

这个变换的行列式为 $(\det A)^{n+1}$. 于是

$$\mu(sf) = |\det A|^{n+1} \int_G u((a,A)(t,T)) f(t,T) dt dT.$$

要求对一切的 $a, t \in V, A, T \in GL(V)$, 有

$$|\det A|^{n+1} u((a,A)(t,T)) = u(t,T).$$

令

$$(a,A) = (t,T)^{-1},$$

则有

$$u(t,T) = u(0,T)/|\det T|^{n+1}.$$

因此,

$$\mu(f) = \int_G \frac{f(t,T)}{|\det T|^{n+1}} dt dT.$$

直接验证, 可知 $\mu(f)$ 确定 G 的 Haar 积分.

2.3　Haar 测度的存在性和唯一性

本节的主要目的是证明 2.2 中所陈述的定理. 由命题 2.1.3 知, 只要对 $C_c^+(G)$ 证明正测度的存在性和唯一性即可.

我们先作一些预备性工作.

命题 2.3.1　设 G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群, $f,\ F \in C_c^+(G)$, 则存在正实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 G 中元 $x_1, \cdots, x_n \in G$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i F) \geqslant f.$$

证明　存在 $t \in G$, 使得 $F(t) > 0$. 令 $\beta = \dfrac{1}{2}F(t)$. 由 F 的连续性可知, 存在单位元 e 的开邻域 V, 使得当 $x \in tV$ 时, 有 $F(x) > \beta$.

设 $\mathrm{supp}(f) = C$. 由于 $\{cV | c \in C\}$ 是 C 的覆盖, 因此存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in C$, 使得 $C \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} c_i V$. 当 $x \notin C$ 时, 自然有命题中所列的不等式. 设 $x \in C$, 则存在 $i, x \in c_i V$. 因此 $t c_i^{-1} x \in tV$. 故有

$$F(t c_i^{-1} x) > \beta.$$

令 $x_i = c_i t^{-1}$, 则有 $(x_i F)(x) > \beta$. 又因 $\{f(x) | x \in C\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中紧集, 故是有限集. 设 M 为其上界, 则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{M}{\beta}(x_i F)(x) \geqslant \frac{M}{\beta}(x_i F)(x) \geqslant f(x).$$

□

系理　设 $F \in C_c^+(G)$, 则对一切左 Haar 测度 μ, 有 $\mu(F) > 0$.

证明　取 $f \in C_c^+(G)$, 使 $\mu(f) \neq 0$, 则可设 $\mu(f) > 0$. 依命题 2.3.1, 存在正实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 G 中元 $x_1, \cdots, x_n$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha (x_i F) \geqslant f.$$

于是, 有

$$\mu(F) \geqslant \frac{\mu(f)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i} > 0.$$

□

定义 2.3.1　设 $f, F \in C_c^+(G)$. 定义

$$(f : F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \,\middle|\, \alpha_i \geqslant 0, \exists x_i \in G, 1 \leqslant i \leqslant n,\ \text{使得}\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x : F) \geqslant f \right\}.$$

从命题 2.3.1 可知 $(f:F)$ 是存在的, 并且它是正数. 对任意左 Haar 测度 μ, 有

$$\mu(f) \leqslant (f:F)\mu(F).$$

命题 2.3.2 设 $f, f_i, F, g \in C_c^+(G)$, 则有

(1) $(f:F) > 0$;

(2) 对任一 $x \in G$, $(xf:F) = (f:F)$;

(3) $(f_1 + f_2 : F) \leqslant (f_1:F) + (f_2:F)$;

(4) 若 $\alpha > 0$, 则 $(\alpha f:F) = \alpha(f:F)$;

(5) $(f:F) \leqslant (f:g)(g:F)$.

证明 (1) $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_iF) \Rightarrow \sup(f) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \sup(F)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqslant \frac{\sup(f)}{\sup(F)} > 0 \Rightarrow (f:F) > 0.$$

(2) $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_iF) \Leftrightarrow xf \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(xx_iF)$.

(3) 若 $f_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_iF)$, $f_2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} \beta_j(y_jF)$, 则

$$f_1 + f_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_iF) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j(y_jF).$$

故

$$(f_1 + f_2 : F) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j.$$

取下端, 有

$$(f_1 + f_2 : F) \leqslant (f_1:F) + (f_2:F).$$

(4) $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_iF) \Leftrightarrow \alpha f \leqslant \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)(x_iF)$.

(5) 设 $f \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x_ig)$, $g \leqslant \sum_{j=1}^{m} \beta_j(y_jF)$, 则

$$f \leqslant \sum_{i \cdot j} (\alpha_i\beta_j)(x_iy_jF).$$

故

$$(f:F) \leqslant \sum_{i \cdot j} \alpha_i\beta_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j\right).$$

取下端, 得

$$(f:F) \leqslant (f:g)(g:F). \qquad \square$$

我们定义一个近似测度. 取定 $C_c^+(G)$ 中两个非零元 f^* 和 F. 对于任意一个 $f \in C_c^+(G)$, 定义

$$\mu_F(f) = (f:F)/(f^*:F).$$

由于 $(f^*:F) > 0$, 因此上式是有意义的.

命题 2.3.3 定义 μ_F 如上. $f, f_1, f_2 \in C_c^+(F)$. 则

(1) $\mu_F(f) > 0$, 只要 $f \neq 0$;

(2) $\mu_F(f) = \mu_F(sf)$, $\forall s \in G$;

(3) $\mu_F(f_1 + f_2) \leqslant \mu_F(f_1) + \mu_F(f_2)$;

(4) $\mu_F(\lambda f) = \lambda \mu_F(f)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$;

(5) $\mu_F(f_1) \leqslant \mu_F(f_2)$ 如果 $f_1 \leqslant f_2$;

(6) $1/(f^*:f) \leqslant \mu_F(f) \leqslant (f:f^*)$.

证明 从命题 2.3.2 即可得到 (1)~(5). 现在证明 (6).

考虑

$$(f:F) \leqslant (f:f^*)(f^*:F).$$

我们有

$$\mu_F(f) \leqslant (f:f^*).$$

又由

$$(f^*:F) \leqslant (f^*:f)(f:F),$$

得

$$\mu_F(f) \geqslant 1/(f^*:f). \qquad \square$$

下面我们证明当 F 的支集趋向单位元时, μ_F 是接近于保持加法的.

命题 2.3.4 G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群, 设 f^*, f_1, $f_2 \in C_c^+(G)$, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在一个单位元的邻域 V, 使得当 $\mathrm{supp}(F) \subseteq V$ 时, 有

$$\mu_F(f_1 + f_2) \geqslant \mu_F(f_1) + \mu_F(f_2) - \varepsilon.$$

证明 令 $C = \mathrm{supp}(f_1) \bigcup \mathrm{supp}(f_2)$, C 为紧. 由命题 2.1.1 可知, 存在一个连续函数 $q \in C_c^+(G)$, 对 $x \in C$, 有 $q(x) = 1$. 取 $\alpha > 0$, 记

$$p(x) = f_1(x) + f_2(x) + \alpha q(x),$$

并定义

$$h_i(x)=\begin{cases} f_i(x)/p(x), & \text{当 } p(x)\neq 0,\\ 0, & \text{当 } p(x)=0,\end{cases}$$

其中 $i=1,2$. 当 $p(x)=0$, 必有 $f_1(x)=f_2(x)=0$. 因此 $h_1(x)$, $h_2(x)$ 是连续函数, 且 $\operatorname{supp}(h_i(x))\subseteq\operatorname{supp}(p(x))$, $i=1,2$. 从而 $h_1(x)$, $h_2(x)$ 皆属于 $C_c^+(G)$, 且 $0\leqslant h_1+h_2\leqslant 1$. 由命题 2.2.1 可得, 存在单位元的邻域 V, 使得只要 xy^{-1} 或 $x^{-1}y\in V$, 就有

$$|h_i(x)-h_i(y)|<\alpha/2,\qquad i=1,2.$$

对于任意支集在 V 中的连续函数 F, 设

$$p\leqslant\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x_jF),$$

若 $t\notin x_jV$, 则有 $(x_jF)(t)=0$. 若 $t\in x_jV$, 则有

$$|h_j(x_j)-h_i(t)|<\alpha/2,\qquad i=1,2,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

于是

$$f_i=h_ip\leqslant\sum_{j=1}^{n}\beta_jh_i(x_jF)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left[h_i(x_j)+\frac{\alpha}{2}\right](x_jF),\qquad i=1,2.$$

这样

$$(f_i:F)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left[h_i(x_j)+\frac{\alpha}{2}\right],\qquad i=1,2.$$

所以

$$(f_1:F)+(f_2:F)\leqslant(1+\alpha)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\right).$$

右方取下端, 得

$$(f_1:F)+(f_2:F)\leqslant(1+\alpha)(p:F),$$

即

$$\begin{aligned}\mu_F(f_1)+\mu_F(f_2)&\leqslant(1+\alpha)\mu_F(p)\\&\leqslant(1+\alpha)\mu_F(f_1+f_2+\alpha q)\\&\leqslant(1+\alpha)[\mu_F(f_1+f_2)+\alpha\mu_F(q)]\\&=\mu_F(f_1+f_2)+\alpha[\mu_F(f_1+f_2)+(1+\alpha)\mu_F(q)]\\&\leqslant\mu_F(f_1+f_2)+\alpha[(f_1+f_2:f^*)+(1+\alpha)(q:f^*)].\end{aligned}$$

对于固定的 f_1, f_2, 取定 q, 对任给 $\varepsilon > 0$, 取 α 小于 1, 且充分小:

$$\alpha < \varepsilon/(j_1 + f_2 : f^*) + 2(q : f^*),$$

则有

$$\mu_F(f_1) + \mu_F(f_2) \leqslant \mu_F(f_1 + f_2) + \varepsilon.$$

现在我们来证明下述命题.

命题 2.3.5　G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群, 则 G 上存在左 Haar 测度.

证明　记 D 为 $C_c^+(G)$ 中不为 0 的所有函数. 给定 $C_c^+(G)$ 中非零函数 f^*. 记 $J(f)$ 为 $\mathbb{R}$ 中闭区间 $[1/(f^* : f), (f : f^*)]$. 作乘积空间

$$j = \prod_{f \in D} J(f).$$

由命题 1.1.3, 可知 J 是紧空间. 对任意 $F \in D, \mu_F(f)$ 恰取值在 $J(f)$ 中. 因此 $a_F = \{\mu_F(f)\}_{f \in D}$ 是 J 中元素. 对每个单位元邻域 V, 作 J 中子集

$$A_V = \{\{\mu_F(f)\}_{f \in D} | \mathrm{supp} F \subseteq V\}.$$

对于任意两个单位元邻域 V_1, V_2, 必有 $V \subseteq V_1 \bigcap V_2$, 即

$$A_V \subset A_{V_1} \bigcap A_{V_2}.$$

注意到 $A_V \neq \varnothing$, J 是紧空间, 由命题 1.4.7 可知, J 中存在一个元素属于所有 A_V 的闭包, 记它为 $\{\mu(f)\}_{f \in D}$. 这就是说, 对任给有限个函数 $f_1, \cdots, f_n$, $\varepsilon > 0$ 以及单位元邻域 V, 必存在 $F \in D$, $\mathrm{supp} F \subseteq V$, 使得

$$|\mu(f_i) - \mu_F(f_i)| < \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

对 $f, f_1, f_2 \in D$, $\lambda \in \mathbb{R}_+, s \in G$, 有

$$\begin{aligned}
&|\mu(sf) - \mu(f)| \leqslant |\mu(sf) - \mu_F(sf)| + |\mu_F(f) - \mu(f)|, \\
&|\mu(\lambda f) - \lambda\mu(f)| \leqslant |\mu(\lambda f) - \mu_F(\lambda f)| + |\lambda\mu_F(f) - \lambda\mu(f)|, \\
&|\mu(f_1 + f_2) - [\mu(f_1) + \mu(f_2)]| \leqslant |\mu(f_1 + f_2) - \mu_F(f_1 + f_2)| \\
&\qquad\qquad + |\mu_F(f_1) - \mu(f_1)| + |\mu_F(f_2) - \mu(f_2)| + \varepsilon_1.
\end{aligned}$$

ε_1 可取任意小的正数, 只要 F 的支集 V 充分小. 因此, 借助于支集充分小的函数 F, 我们可证明

$$\begin{aligned}
&\mu(sf) = \mu(f), \\
&\mu(\lambda f) = \lambda\mu(f), \\
&\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2).
\end{aligned}$$

由证明过程可知

$$\mu(f) \geqslant 1/(f^*:f) > 0.$$

则 μ 是 $C_c^+(G)$ 中的正线性函数, 它对 G 不变. 令 $\mu(0)=0$, 并利用命题 2.1.3, 可知 μ 可以扩充为 $C_c(G)$ 上的测度. 扩充后, 它仍对 G 不变, 即 μ 为 G 的 Haar 测度.□

设 $f, g \in C_c(G)$, 我们考虑

$$f(y)g(y^{-1}x).$$

此函数对 y 显然是连续的. 又注意到

$$\operatorname{supp}\left(f(y)g\left(y^{-1}x\right)\right) \subseteq \operatorname{supp}(f),$$

因此 $f(y)g(y^{-1}x) \in C_c(G)$. 于是我们可引入

定义 2.3.2 设 μ 是 G 的左不变 Haar 测度, $f, g \in C_c(G)$, 则 f 与 g 的卷积是指

$$(f*g)(x) = \int_G f(y)g\left(y^{-1}x\right)d\mu(y), \quad x \in G.$$

注意到

$$\operatorname{supp}(f*g) \subseteq \operatorname{supp}\left(g\left(y^{-1}x\right)\right) \subseteq \operatorname{supp}(yg) \subseteq y\operatorname{supp}(g),$$

由命题 2.2.2 可知, $f*g$ 是 x 的连续函数. 因此 $f*g \in C_c(G)$, 即卷积是 $C_c(G) \times C_c(G) \to C_c(G)$ 的映射.

为了证明 Haar 测度的唯一性, 尚需两个预备命题.

命题 2.3.6 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间, μ 是 X 的正测度, $f: X \to \mathbb{R}$ 连续, $a \in X$. 对任给 $\varepsilon > 0$, 必存在 a 的邻域 V, 使得对于 $g \in C_c^+(X, V)$ 及 $\displaystyle\int g d\mu = 1$, 有

$$\left|\int fgd\mu - f(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$

证明 f 连续, 故对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 a 的邻域 V, 使得

$$|f(y) - f(a)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall y \in V.$$

则

$$\left|\int fgd\mu - f(a)\right| = \left|\int fgd\mu - \int f(a)gd\mu\right| \leqslant \int |f(y)-f(a)|gd\mu \leqslant \varepsilon.$$

我们对 $g \in C_c(G)$ 定义一个函数 $\check{g} \in C_c(G)$ 如下:

$$\check{g}(x) = g(x^{-1}).$$

命题 2.3.7 G 为局部紧 Hausdorff 群, μ 是 G 的左不变 Haar 测度, $f \in C_c(G)$. 对任给 $\varepsilon > 0$, 必存在单位元 e 的邻域 V, 使得若 $g \in C_c^+(G, V)$, 且 $\int g d\mu = 1$, 则

$$|(f * \check{g})(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in G.$$

证明

$$(f * \check{g})(x) = \int_G f(y)\check{g}\left(y^{-1}x\right) d\mu(y) = \int_G f(y) g\left(x^{-1}y\right) d\mu(y) = \int_G f(xy) g(y) d\mu(y),$$

这里用了 μ 的左不变性. 对任给 $\varepsilon > 0$, 由命题 2.2.1, 存在单位元开邻域 U, 使得

$$|(f * \check{g})(x) - (f * \check{g})(x')| \leqslant \varepsilon/3,$$
$$|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon/3,$$

只要 $x = x'U$, $\forall x, x' \in G$. 设 $\operatorname{supp}(f) = C$, 则由 C 的紧性可知, 存在 $x_1, \cdots, x_n \in C$, 使得 $\bigcup_{i=1}^{n}(x_i U) \supseteq C$. 对每个 x_i, 利用命题 2.3.6, 存在单位元的开邻域 V_i, 使得

$$\left| \int_G f(x_i y) g(y) d\mu(y) - f(x_i) \right| \leqslant \varepsilon/3,$$

只要 $g \in C_c(G, V_i)$, $\int g d\mu = 1$ 即可. 取

$$V = U \bigcap V_1 \bigcap \cdots \bigcap V_n.$$

注意, 对任意 $x \in C$, 必有 i, 使得 $x \in x_i U$. 设 $g \in C_c(G, V)$, 且 $\int g d\mu = 1$. 由前面各式可得

$$|(f * \check{g})(x) - f(x)| = |(f * \check{g})(x) - (f * \check{g})(x_i)| + |(f * \check{g})(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

当 $x \notin C$ 时, 不等式左方为 0, 这是显然的. □

现在我们可以证明

命题 2.3.8 设 G 是局部紧的 Hausdorff 拓扑群, μ, ν 为 G 上两个左 Harr 测度. 则必有 $\lambda > 0$, 使得 $\mu = \lambda\nu$.

证明 无妨设存在 $f_0 \in C_c^+(G)$, 使得

$$\mu(f_0) = \nu(f_0) = 1$$

(否则的话, 以 $\mu/\mu(f_0)$ 和 $\nu/\nu(f_0)$ 代替 μ 和 ν 即可). 我们证明 $\mu = \nu$.

对任意 $f, g \in C_c(G)$, 考虑 $h = f * \check{g} \in C_c(G)$. 利用 Fubini 定理, 可得

$$\int h(x)d\nu(x) = \int f(y)\left(\int \check{g}\left(y^{-1}x\right) d\nu(x)\right) d\mu(y) = \int f d\mu \cdot \int \check{g} d\nu.$$

由命题 2.3.7 可知, 对任给 $\varepsilon_1 > 0$, 存在单位元的开邻域 V, 使得只要 $g \in C_c(G, V)$, $\int g d\mu = 1$, 就有

$$\|h - f\| = \sup\{|h(x) - f(x)||x \in G\} \leqslant \varepsilon_1.$$

由命题 2.1.2, 对任给 $\varepsilon_2 > 0$, 只要取 ε_1 充分小, 就有

$$\left|\int h d\nu - \int f d\nu\right| < \varepsilon_2.$$

注意到 $\int f_0 d\mu = \int f_0 d\nu = 1$. 令 $f = f_0$, 我们得到

$$\int h d\nu = \int \check{g} d\nu,$$

$$\left|\int \check{g} d\nu - 1\right| = \left|\int h d\nu - \int f_0 d\nu\right| < \varepsilon_3,$$

只要对适当的单位元邻域 $V_1, g \in C_c(G, V_1)$, 且 $\int g d\mu = 1$ 即可.

对任意 f, 设 $\left|\int f d\mu\right| \leqslant M$, 则在上述条件下有

$$\begin{aligned}\left|\int f d\nu - \int f d\mu\right| &\leqslant \left|\int f d\nu - \int h d\nu\right| + \left|\int h d\nu - \int f d\mu\right| \\ &\leqslant \varepsilon_2 + \left|\int f d\mu\right|\left|\int \check{g} d\nu - 1\right| \leqslant \varepsilon_2 + M\varepsilon_3.\end{aligned}$$

因此, $|\mu(f) - \nu(f)|$ 可任意小, 即

$$\mu(f) = \nu(f), \quad \forall f \in C_c(G),$$

也即

$$\mu = \nu.$$ □

这样我们便完成了 2.2 节中定理 2.2.1 的全部证明. 此处的证明基本上是 A. Weil 给出的.

上述证明对右 Haar 测度是完全适用的, 这是不言而喻的.

2.4 Haar 测度的性质

设 G 是局部紧 Hausdorff 群, μ 是 G 的左不变 Haar 测度. 对 $t \in G$, $f \in C_c(G)$, 设

$$\nu(f) = \int_G f\left(xt^{-1}\right) d\mu(x).$$

则对 $s \in G$, 有 $\nu(sf) = \nu(f)$, 所以 ν 是 G 的左不变测度. 由唯一性定理可知, μ 与 ν 只差一个正常数因子, 记为 $\Delta_G^r(t)$ 或 $\Delta^r(t)$. 我们称函数 Δ^r 为 G 的右模函数. 按定义有

$$\int_G f\left(xt^{-1}\right) d\mu(x) = \Delta^r(t) \int_G f(x) d\mu(x).$$

以上关系又简记为

$$d(xt) = \Delta^r(t) dx.$$

命题 2.4.1 右模函数 $\Delta^r : G \to \mathbb{R}_+^\times$ 是拓扑群同态.

证明 $\Delta^r(st) \int f(x) dx = \int f\left(xt^{-1}s^{-1}\right) dx = \Delta^r(s) \int f(xt^{-1}) dx = \Delta^r(s)\Delta^r(t) \int f(x) dx$. 取 $f \in C_c^+(G)$, 使 $\int f dx = 1$, 则得

$$\Delta^r(st) = \Delta^r(s)\Delta^r(t).$$

故而 Δ^r 是群同态. 又由命题 2.2.2 可知

$$S \mapsto \int f\left(xs^{-1}\right) dx$$

是连续函数, 所以 Δ^r 是连续群同态. □

定义 2.4.1 如局部紧的 Hausdorff 群 G 的右模函数恒等于 1, 则称它为幺模群.

显然, G 是一个幺模群当且仅当 G 的左不变 Haar 测度等于右不变 Haar 测度. 当 G 是 Abel 群时, 它自然是幺模群.

如果我们从右不变 Haar 测度出发也可以得到类似上述 Δ^r 的函数, 这时, 我们称它为左模函数, 并记之为 Δ_G^l 或 Δ^l.

命题 2.4.2 设 G 满足上述条件, μ 为 G 的左不变 Haar 测度, 我们仍记 $\check{f}(x) = f\left(x^{-1}\right)$. 定义

$$\check{\mu}(f) = \mu(\check{f}).$$

则 $\check{\mu}$ 是右不变 Haar 测度.

证明 $\check{\mu}$ 显然是线性函数. 对任意 $f \in C_c(G)$, 有

$$(fs)^{\vee}(x) = (fs)\left(x^{-1}\right) = f\left(x^{-1}s^{-1}\right) = \check{f}(sx) = s^{-1}\check{f}(x).$$

于是, $(fs)^{\vee} = s^{-1}\check{f}$. 因此

$$\check{\mu}(fs) = \mu(fs)^{\vee} = \mu(s^{-1}\check{f}) = \mu(\check{f}) = \check{\mu}(f).$$ □

系理 G 是幺模群, 当且仅当对任意 $f \in C_c(G)$, 有 $\mu(f) = \check{\mu}(f)$.

命题 2.4.3 G 如上述定义, 则对一切 $s \in G$, 有

$$\Delta^r(s)\Delta^l(s) = 1.$$

证明 设 μ 是左不变 Haar 测度, 则对 $\forall s \in G$, 有

$$\begin{aligned}\mu(fs) &= \Delta^r(s)\mu(f) = \Delta^r(s)\check{\mu}(\check{f}) = \Delta^r(s)\Delta^l(s)\check{\mu}\left(s^{-1}\check{f}\right)\\ &= \Delta^r(s)\Delta^l(s)\check{\mu}(fs^{\vee}) = \Delta^r(s)\Delta^l(s)\mu(fs).\end{aligned}$$

适当选取 f, 使 $\mu(f) \neq 0$, 则得 $\Delta^r(s)\Delta^l(s) = 1$. □

命题 2.4.4 G 如上, 对于一个左不变测度 μ, 我们有

$$\int_G f\left(x^{-1}\right) d\mu(x) = \int_G \frac{f(x)}{\Delta^r(x)} d\mu(x),$$

且这个积分是一个右不变 Haar 测度 $\nu(f)$.

证明 设 μ 是左不变 Haar 测度. 等式左方为 $\mu(\check{f})$, 依命题 2.4.2, 它是一个右不变 Haar 测度, $\nu(f) = \mu(\check{f})$. 记

$$f^* = f/\Delta^r.$$

等式右方为 $\mu(f^*)$, 记为 $\rho(f)$. 注意到

$$(f^*s)(x) = \frac{f\left(xs^{-1}\right)}{\Delta^r\left(xs^{-1}\right)} = \frac{f\left(xs^{-1}\right)}{\Delta^r(x)\Delta^r\left(s^{-1}\right)} = \Delta^r(s)(fs)^*(x),$$

于是, 有

$$\mu(f^*s) = \Delta^r(s)\mu\left((fs)^*\right).$$

我们已有

$$\mu(f^*s) = \Delta^r(s)\mu(f^*).$$

比较上两式, 因 $\Delta^r(s) \neq 0$, 故得到

$$\mu\left((fs)^*\right) = \mu(f^*),$$

即

$$\rho(fs) = \rho(f).$$

因此, ρ 是右不变 Haar 测度. 于是, 存在 $\lambda > 0$, 使得

$$\rho(f) = \lambda \nu(f), \quad \forall f \in C_c(G).$$

我们下面证明 $\lambda = 1$.

因 $\Delta^r(s)$ 连续, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 e 的对称紧邻域 V, 使得对一切 $s \in V$, 有

$$\left|1 - \frac{1}{\Delta^r(s)}\right| < \varepsilon.$$

我们可以找到一个函数 $f \in C_c^+(G)$, $\operatorname{supp}(f) \subseteq V$, 进一步可设 $f = \check{f}$, 不然只要用 $f\check{f}$ 代替 f 即可. 且 $\mu(f) = 1$. 于是有

$$|\check{f} - f^*| = \left|f - \frac{f}{\Delta}\right| = \left|1 - \frac{1}{\Delta}\right| f < \varepsilon f.$$

因为 μ 是正测度, 可知

$$|\mu(\check{f}) - \mu(f^*)| < \varepsilon \mu(f) = \varepsilon.$$

注意到 $\mu(\check{f}) = \mu(f) = 1$, $\mu(f^*) = \rho(f) = \lambda$, 因此有

$$|1 - \lambda| < \varepsilon.$$

ε 可任意小, 故必有 $\lambda = 1$. □

以上关系简记为 $d\left(x^{-1}\right) = \Delta^r\left(x^{-1}\right) dx$.

系理　μ 为 G 的左不变测度, 则对 $f \in C_c(G)$, 有

$$\int_G f\left(x^{-1}\right) \Delta^r\left(x^{-1}\right) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x).$$ □

下面讨论一下幺模群.

命题 2.4.5　Hausdorff 紧群是幺模群.

证明　设 G 是 Hausdorff 紧群. 因此, 函数 $f \equiv 1$ 是属于 $C_c^+(G)$ 的. 把它代入

$$\mu(fs) = \Delta^r(s)\mu(f),$$

则得 $\Delta^r(s) = 1$, 对任意 $s \in G$ 成立. □

命题 2.4.6　设 G 为局部紧 Hausdorff 群, 若 G 存在一个单位元的紧邻域 V, 在 G 的内自同构下不变, 则它是幺模群.

证明 设 μ 为 G 的左不变 Haar 测度. 记 φ_V 是 V 的特征函数. 因为 V 是紧的, 故

$$0 \neq \int \varphi_V(x) d\mu(x) < \infty,$$

即 V 为可测集 (见习题 3). 由假设, 对任意 $s \in G$, 有 $sVs^{-1} = V$. 于是, $\varphi_V(x) = \varphi_V\left(sxs^{-1}\right)$ 且

$$\int \varphi_V\left(sxs^{-1}\right) d\mu(x) = \int \varphi_V(x) d\mu(x).$$

左方为

$$\Delta^r(s) \int \varphi_V(x) d\mu(x),$$

因此

$$\Delta^r(s) = 1. \qquad \square$$

命题 2.4.7 设 G 是局部紧的 Hausdorff 群, σ 是 G 的拓扑自同构. μ 和 ν 分别是 G 的左、右 Haar 测度, 则必存在唯一的正实数 $\delta(\sigma)$, 使得对一切 $f \in L^1(G)$, 有

$$\int f\left(\sigma^{-1}(x)\right) d\mu(x) = \delta(\sigma) \int f(x) d\mu(x),$$
$$\int f\left(\sigma^{-1}(x)\right) d\nu(x) = \delta(\sigma) \int f(x) d\nu(x).$$

证明 只需对 $f \in C_c(G)$ 证明即可. 令

$$\mu'(f) = \int f\left(\sigma^{-1}(x)\right) d\mu(x).$$

对 $s \in G$, 设 $s^{-1} = \sigma^{-1}(t)$, 则

$$\begin{aligned}
\mu'(sf) &= \int (sf)\left(\sigma^{-1}(x)\right) d\mu(x) = \int f\left(s^{-1}\sigma^{-1}(x)\right) d\mu(x) \\
&= \int f\left(\sigma^{-1}(tx)\right) d\mu(x) = \int f\left(\sigma^{-1}(x)\right) d\mu(x) \\
&= \mu'(f).
\end{aligned}$$

因此, μ' 是 G 的左 Haar 测度. 故存在唯一的 $\delta(\sigma) > 0$, 使第一式成立. 同理, 存在唯一的 $\delta(\sigma')$, 使第二式成立. 令 $\nu(f) = \mu(\check{f})$, 则

$$\int \check{f}\left(\sigma^{-1}(x)\right) d\mu(x) = \delta(\sigma) \int \check{f}(x) d\mu(x) = \delta(\sigma) \int f(x) d\nu(x).$$

另一方面,

$$\int \check{f}\left(\sigma^{-1}(x)\right) d\mu(x) = \int f\left(\sigma^{-1}(x)\right) d\nu(x) = \delta(\sigma)' \int f(x) d\nu(x).$$

比较两式可得

$$\delta(\sigma) = \delta(\sigma').$$

□

定义 2.4.2　G 的拓扑自同构 σ, 若使命题 2.4.7 中 $\delta(\sigma) = 1$, 则 σ 称为幺模自同构.

命题 2.4.8　$\delta : \sigma \to \delta(\sigma)$ 是从 G 的拓扑自同构群到 $\mathbb{R}_+^\times$ 的同态.

证明　设 μ 为 G 的左 Haar 测度, σ, τ 是 G 的两个拓扑自同构.

$$\begin{aligned}\delta(\sigma\tau)\int f(x)d\mu(x) &= \int f\left((\sigma\tau)^{-1}(x)\right)d\mu(x)\\ &= \int f\left(\tau^{-1}\sigma^{-1}(x)\right)d\mu(x)\\ &= \delta(\tau)\int f\left(\sigma^{-1}(x)\right)d\mu(x)\\ &= \delta(\tau)\delta(\sigma)\int f(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

选取 f, 使得 $\mu(f) \neq 0$, 则得到 $\delta(\sigma\tau) = \delta(\sigma)\delta(\tau)$.　□

命题 2.4.9　设 G 如上定义. 对 G 的每个拓扑自同构 σ, 有 $\Delta^r(\sigma(s)) = \Delta^r(s)$, 对任意 $s \in G$.

证明　设 μ 为 G 的左 Haar 测度. 考虑

$$\int f\left(\sigma^{-1}\left(xs^{-1}\right)\right)d\mu(x) = \Delta^r(s)\int f\left(\sigma^{-1}(x)\right)d\mu(x) = \Delta^r(s)\delta(\sigma)\int f(x)d\mu(x).$$

我们有

$$\sigma^{-1}(s^{-1}) = (\sigma^{-1}(s))^{-1}$$

于是

$$\begin{aligned}\int f\left(\sigma^{-1}\left(xs^{-1}\right)\right)d\mu(x) &= \int f\left(\sigma^{-1}(x)(\sigma^{-1}s)^{-1}\right)d\mu(x)\\ &= \Delta^r\left(\sigma^{-1}(s)\right)\int f\left(\sigma^{-1}(x)\right)d\mu(x)\\ &= \Delta^r\left(\sigma^{-1}(s)\right)\delta(\sigma)\int f(x)d\mu(x),\end{aligned}$$

对任意 σ, 比较两式得

$$\Delta^r(\sigma(s)) = \Delta^r(s).$$

命题 2.4.10　设 H, K 都是局部紧 Hausdorff 群, μ, ν 分别是它们的左 Haar 测度, 则 $\mu\times\nu$ 是 $G = H\times K$ 的左不变 Haar 测度, 且 $\Delta_G^r(s,t) = \Delta_H^r(s)\Delta_K^r(t)$, $\forall s \in H$, $t \in K$.

证明　由命题 1.1.5 和命题 2.6.3 可知, G 是局部紧的 Hausdorff 群. 设 $f \in C_c(G)$, $s \in H$, $t \in K$, 则由 Fubini 定理, 下式成立

$$\int_K \int_H f\left(s^{-1}x, t^{-1}y\right) d\mu(x) d\nu(y) = \int_K \int_H f(x,y) d\mu(x) d\nu(y).$$

因此, $\mu \times \nu$ 确是 G 的左不变 Haar 测度. 另外,

$$\begin{aligned}
\int_K \int_H f\left(xs^{-1}, yt^{-1}\right) d\mu(x) d\nu(y) &= \int_K \left(\int_H f\left(xs^{-1}, yt^{-1}\right) d\mu(x) \right) d\nu(y) \\
&= \Delta_H^r(s) \int_H \left(\int_K f\left(x, yt^{-1}\right) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \Delta_H^r(s) \Delta_K^r(t) \int_k \int_H f(x,y) d\mu(x) d\nu(y).
\end{aligned}$$

由定义,

$$\int_K \int_H f\left(xs^{-1}, yt^{-1}\right) d\mu(x) d\nu(y) = \Delta_G^r(s,t) \int_K \int_H f(x,y) d\mu(x) d\nu(y).$$

比较两式, 得到

$$\Delta_H^r(s) \Delta_K^r(t) = \Delta_G^r(s,t). \qquad \square$$

系理 $G = H \times K$ 如上定义, 则 G 是幺模群当且仅当 H, K 是幺模群.

证明 充分性显然. 现设 G 是幺模群, 则

$$\Delta_G^r(s,t) = 1.$$

取 s 为 H 的单位元, 得 $\Delta_K^r(t) = 1$. 同理, 取 t 为 K 的单位元, 可得 $\Delta_H^r(s) = 1$. $\square$

显然, 命题 2.4.10 可推广到有限个局部紧 Hausdorff 群乘积的情形.

命题 2.4.11 G 是局部紧 Hausdorff 群. H 是它的开子群, 则 $\Delta_H^r(t) = \Delta_G^r(t)$, 对任意 $t \in H$.

证明 设 μ 是 G 的 Haar 测度. 由命题 1.1.7 可知, H 是局部紧 Hausdorff 群. 对任意 $f \in C_c(H)$, $\operatorname{supp}(f) = U$ 是紧集. 因为 H 是开集, 故可设 $f(x) = 0$, 对 $x \in G \backslash H$, 使得 f 成为 G 上的连续函数, $f \in C_c(G)$. 于是, $\int_G f(x) d\mu(x)$ 就是 H 上的 Haar 测度. 自然地有 $\Delta_H^r(t) = \Delta_G^r(t)$, $\forall t \in H$. $\square$

系理 如果局部紧的 Hausdorff 群 G 为幺模群, 则 G 的开子群是幺模群.

类似的结论对于 G 的正规闭子群也是成立的, 但证明过程要麻烦一点. 我们先观察另一结果.

命题 2.4.12 设 G, K 都是局部紧 Hausdorff 群. $\pi : G \to K$ 是连续满同态, $H = \ker \pi$. dy, dz 分别表示 H, K 的左 Haar 测度, 则下式定义 G 的一个左 Haar 测度 dx,

$$\int_G f(s) dx = \int_K f^0(z) dz, \quad \forall f \in C_c(G),$$

其中

$$f^0(\pi(x)) = \int_H f(xy)dy.$$

证明 首先要说明积分是有意义的. 因为 H 是 $\{e\}$ 在 π 下的原像, 所以, 它是闭子群. 因而, 它是局部紧 Hausdorff 群. 故存在左 Haar 测度 dy. 对任意 $x \in G$, $f(xy)$ 看成是 y 的函数, 当 $y \in H$ 时, 它是 H 上的连续函数, 其支集包含在 $x^{-1}\mathrm{supp}(f)\bigcap H$ 中, 故

$$\widetilde{f}(x) = \int_H f(xy)dy$$

有意义. 而且, 由于它对 H 是左不变的, 所以有 $\widetilde{f}(hx) = \widetilde{f}(x)$, $\forall h \in H$, 即 $\widetilde{f}$ 在 H 的同一陪集上取相同值. 故可以定义

$$f^\circ(\pi(x)) = \widetilde{f}(x).$$

注意到 $\pi(\mathrm{supp}(f)) \supseteq \mathrm{supp}(f^0)$, 加之 $x \mapsto \widetilde{f}(x)$ 及 π 都是连续的, 因此 $f^\circ \in C_c(K)$. 可定义

$$\mu(f) = \int_K f^\circ(z)dz.$$

现在, 我们证明 μ 是 G 上左不变 Haar 测度. 注意到

$$\begin{aligned}(sf)^\circ(\pi(x)) &= \int_H (sf)(xy)dy = \int_H f\left(s^{-1}xy\right)dy \\ &= f^\circ\left(\pi\left(s^{-1}x\right)\right) = f^\circ(\pi(s)^{-1}\pi(x)) \\ &= \pi(s)f^\circ(\pi(x)),\end{aligned}$$

有

$$(sf)^\circ = \pi(s)f^\circ.$$

于是

$$\begin{aligned}\mu(sf) &= \int_K (sf)^\circ(z)dz = \int_K (\pi(s)f^\circ)(z)dz \\ &= \int_K f^\circ\left(\pi(s)^{-1}z\right)dz = \int_K f^\circ(z)dz = \mu(f).\end{aligned}$$

记

$$\mu(f) = \int_G f(x)dx,$$

即完成定理的证明. □

命题 2.4.13 G 是局部紧 Hausdorff 群, H 是 G 的闭正规子群, 则 $\Delta_H^r(t) = \Delta_G^r(t)$, $\forall t \in H$.

证明 由命题 1.4.10 和命题 1.6.4, 可知 H 与 G/H 都是局部紧 Hausdorff 群. 记 $\pi: G \to G/H = K$. 以 dy, dz 表示 H 和 K 的左 Haar 测度. 命题 2.4.12 所对应的 G 的 Haar 测度记为 dx. 对 $f \in C_c(G)$, $t \in H$, 有 (按命题 2.4.12 的符号)

$$(ft)^\circ(\pi(x)) = \int_H (ft)(xy)dy = \int f\left(xyt^{-1}\right)dy$$
$$= \Delta_H^r(t)\int_H f(xy)dy = \Delta_H^r(t)f^\circ(\pi(x)),$$

即

$$(ft)^\circ = \Delta_H^r(t)f^\circ.$$

于是

$$\int_G (ft)(x)dx = \int_x (ft)^\circ(z)dz = \int_K \Delta_H^r(t)f^\circ(z)dz$$
$$= \Delta_H^r(t)\int_K f^\circ(z)dz = \Delta_H^r(t)\int_G f(x)dx,$$

即

$$\Delta_H^r(t) = \Delta_G^r(t), \quad \forall t \in H.$$

□

系理 设 G 是局部紧幺模群, 则 G 的每个闭正规子群也是幺模群.

2.5 相对不变测度

设 G 是局部紧 Hausdorff 群. E 是局部紧 Hausdorff 空间, 它是 G 的 (左) 齐性空间. 通过 G 在 E 上的作用, 便得 G 在 $C_c(E)$ 上的作用: $s \in G$, $x \in E$, $f \in C_c(E)$. 定义

$$(sf)(x) = f\left(s^{-1}x\right).$$

注意 $s^{-1}x$ 表示 s^{-1} 作用在 x 上的结果.

对任意 $s \in G$, $x \mapsto sx$ 是 E 到 E 上的同胚. 设 $\mu \in M(E)$, 则从定义 2.1.2, 可知有测度 $s_*(\mu)$, $s_*(\mu)(f) = \mu\left(s^{-1}f\right)$. 设 μ 为 E 上的正测度, 称 μ 对 G 是拟不变的, 是指存在 $G \times E$ 上的正函数 $\delta(s,x)$, 使 δ 在紧集上有界; 对每个 s, $x \mapsto \delta(s,x)$ 是可测函数, 并且

$$d\mu(sx) = \delta(s,x)d\mu(x).$$

如果上述 $\delta(s,x)$ 与 x 无关, 则我们称 μ 是 G 的相对不变测度, 这时, 显然有

$$\mu(sf) = \delta(s)\mu(f).$$

如果 $\delta \equiv 1$, 我们说 μ 是 E 的 G 不变测度.

命题 2.5.1 设 H 是局部紧 Hausdorff 群 G 的闭子群, G 以左平移作用在齐性空间 G/H 上, 则在 G/H 上必存在对 G 的拟不变测度.

为了证明命题 2.5.1, 我们先看几个引理. 设 G, H 同命题 2.5.1 中定义. 映射 $\pi : G \to G/H$, $x \mapsto xH$. 记 xH 为 x°, dx, dy 分别为 G, H 的左 Haar 测度. 若 $f \in C_c(G)$, 设

$$f^\circ(x^\circ) = \int_H f(xy)dy,$$

则有

命题 2.5.2 记号如上, 有

(1) 对任意 $s \in G$, $f \in C_c(G)$, 有 $(sf)^\circ = sf^\circ$;

(2) 对任意 $t \in H$, $f \in C_c(G)$, 有 $(ft)^\circ = \Delta_H^r(t)f^\circ$.

证明 (1) $(sf)^\circ(x^\circ) = \displaystyle\int_H (sf)(xy)dy = \int_H \left(s^{-1}xy\right)dy = f^\circ\left(\left(s^{-1}x\right)^\circ\right) = f^\circ\left(s^{-1}x^\circ\right) = sf^\circ(x^\circ)$.

(2) $(ft)^\circ(x^\circ) = \displaystyle\int_H (ft)(xy)dy = \Delta_H^r(t)\int_H f(xy)dy = \Delta_H^r(t)f^\circ(x^\circ)$. □

命题 2.5.3 G, H 和 π 如上定义. 若 K 是 G/H 的紧集, 则存在 G 中紧集 K, 使得 $\pi(J) = K$.

证明 设 V 是 G 中 e 的紧邻域, 则对 $s \in G$, Vs 是 s 的紧邻域, $\pi(s) \in \pi(Vs)$, 后者是紧集. 由于 π 是映上的, $\{\pi(Vs)\}_{s\in G}$ 是 G/H 的覆盖, K 是紧集, 所以存在 $s_1, \cdots, s_n \in G$, 使得 $K \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} \pi(Vs_i) = \pi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Vs_i\right)$. 令

$$J = \bigcup_{i=1}^{n} Vs_i \bigcap \pi^{-1}(K).$$

则 $\pi(J) = K$, J 是紧集合 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} Vs_i$ 中的闭集, 故是 G 中紧集合. □

命题 2.5.4 以上符号意义不变. 则在 G 上存在正连续函数 f, 使得对任意紧集 $J \subset G$, 有 $JH \bigcap \operatorname{supp}(f)$ 是紧集, 且对任意 $x \in G$, 有

$$\int_H f(xy)dy = 1.$$

证明 因为 H 是闭群, 故对任何紧集 $J \subseteq G$, JH 是闭集 (见第 1 章习题 3). 取 g 为有紧支集的正函数, 由命题 2.1.1, 可知 g 存在性. 于是, $JH \bigcap \operatorname{supp}(g)$ 是紧集中的闭集, 当然也是紧集. 设

$$g^\circ(x) = \int_H g(xy)dy.$$

因为 dy 是 H 的左不变测度, 所以 $g^\circ(x)$ 对于 H 的同一陪集取同样的值. 令 $f = g/g^\circ$, 则

$$\int_H f(xy)dy = 1.$$

不难看出 supp(f) =supp(g). f 即为所求的函数. □

命题 2.5.5 映射 $C_c(G) \to C_c(G/H) : f \mapsto f^\circ$ 是满的. 在这个映射下, $C_c^+(G)$ 的像是 $C_c^+(G/H)$.

证明 设 $g \in C_c(G/H)$. 取 f 为命题 2.5.4 中所作的函数. 令 $h(x) = g(\pi(x))f(x)$. 由命题 2.5.3, 存在 G 的紧子集 K, 使得 $\pi(K)$=supp(g). 则 supp$(h) = HK \bigcap$supp(f) 是 G 的紧集, 而且

$$h^\circ(x) = \int_H g(\pi(xy))f(xy)dy = g(\pi(x)) \int_H f(xy)dy = g(\pi(x)).$$ □

命题 2.5.6 G 有连续函数 $\delta > 0$, 并且对任意 $x \in G, y \in H$, 有

$$\delta(xy) = \delta(x)\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)},$$

其中 Δ_H, Δ_G 分别是 H, G 的 (右) 模函数.

证明 取 f 为命题 2.5.4 所给的函数. 定义

$$\delta(x) = \int_H \frac{\Delta_G(y)}{\Delta_H(y)} f(xy)dy,$$

则

$$\begin{aligned}
\delta(xy_1) &= \int_H \frac{\Delta_G(y)}{\Delta_H(y)} f(xy_1y)dy \\
&= \frac{\Delta_H(y_1)}{\Delta_G(y_1)} \int \frac{\Delta_G(y_1y)}{\Delta_H(y_1y)} f(xy_1y)dy \\
&= \frac{\Delta_H(y_1)}{\Delta_G(y_1)} \delta(x).
\end{aligned}$$ □

命题 2.5.1 的证明: 取 δ 为命题 2.5.6 中的函数. 在 G 上取测度 $d\mu = \delta(x)dx$, 则对 $y \in H$, 有

$$d\mu(xy) = \delta(xy)d(xy) = \frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)} = \delta(x) \cdot \Delta_G(y)dx = \Delta_H(y)d\mu(x).$$

设 $f,g\in C_c(G)$, 则

$$\begin{aligned}\mu(g^\circ f) &= \int_G f(x)\left(\int g(xy)dy\right)d\mu(x)\\ &= \int_G\int_H f\left(xy^{-1}\right)g(x)dyd\mu\left(xy^{-1}\right)\\ &= \int_G\int_H f\left(xy^{-1}\right)g(x)\Delta_H\left(y^{-1}\right)dyd\mu(x)\\ &= \int_G\int_H f(xy)g(x)dyd\mu(x)\\ &= \mu\left(f^\circ g\right).\end{aligned}$$

若 $f^\circ=0$, 我们取 g° 在 $\mathrm{supp}(f)$ 上的值为 1, 可见 $\mu(f)=0$.

由命题 2.5.5, 对任意 $\nu\in M(G/H)$, 可以定义 $\nu^\circ\in M(G)$ 如下：$f\in C_c(G)$, 定义 $\nu^\circ(f)=\nu(f^\circ)$.

以上的讨论告诉我们, 存在 $\nu\in M(G/H)$, 使得 $\mu=\nu^\circ$. 这时, 对 $s\in G$, 有

$$d\mu(sx)=\delta(sx)d(sx)=\delta(sx)dx=\frac{\delta(sx)}{\delta(x)}d\mu(x).$$

从命题 2.5.6 中 δ 的定义可知, $\delta(sx)$ 与 $\delta(x)$ 只与 sx 和 x 所属的 H 的陪集有关. 于是

$$d\nu(\pi(sx))=\frac{\delta(sx)}{\delta(x)}d\nu(\pi(x)).$$

因此, 这个 ν 是 G/H 上对于 G 的拟不变测度. □

由上面 $\mu(f)=\nu^\circ(f)=\nu(f^\circ)$, 有公式

$$\int_G f(x)\delta(x)dx=\int_{G/H}\left(\int_H f(xy)dy\right)dx^\circ.$$

下面把 G 视为其自身的齐性空间, 我们讨论 G 的相对不变测度.

定义 2.5.1　一个局部紧的 Hausdorff 群 G 上的正测度 μ 称为相对 (左) 不变的, 如果对每个 $s\in G$ 存在一个 $\Delta(s)>0$, 使得 $\mu(sf)=\Delta(s)\mu(f)$, $\forall f\in C_c(G)$.

显然, $\Delta: s\mapsto\Delta(s)$ 是 G 到正实数乘法群 $\mathbb{R}_+^\times$ 中的连续同态 (命题 2.2.2), 它称为 μ 的左模. 为了区分模函数, 把它记为 $\Delta_\mu^i(s)$. 类似地可以定义相对 (右) 不变测度 ν 及右模 Δ_ν^r.

命题 2.5.7　G 如上定义. μ 是 G 上左 (右) 不变 Haar 测度. $\Delta: G\to\mathbb{R}_+^\times$ 是连续同态. 则

$$\nu(f)=\int_G\Delta(x)f(x)d\mu(x),\quad f\in C_c(G)$$

是相对左 (右) 不变测度, ν 的左 (右) 模为 Δ. G 的每个相对左 (右) 不变测度都可被这样唯一表出.

证明 设 μ 为左不变 Haar 测度, 则

$$\nu(sf)=\mu(\Delta sf)=\Delta(s)\mu(s(\Delta f))=\Delta(s)\mu(\Delta f)=\Delta(s)\nu(f).$$

故 ν 是左模为 Δ 的相对左不变测度.

反之, 设有 ν 为相对左不变测度, 其左模为 Δ. 令 $\mu(f)=\nu(f/\Delta)$, 则

$$\mu(sf)=\nu(sf/\Delta)=\nu\left(\frac{sf}{s\Delta}\right)\Big/\Delta(s)=\Delta(s)\nu(f/\Delta)/\Delta(s)=\mu(f).$$

因此, μ 为左不变测度. 显然, 还有

$$\nu(f)=\mu(\Delta f).$$

由 Haar 测度的唯一性, 可知表法唯一. 右不变情形可同样证明. □

系理 2.5.1 具有相同右 (左) 模的两个相对左 (右) 不变测度彼此只差一个正实数因子.

命题 2.5.8 G 是局部紧的 Hausdorff 群. 每个 G 的相对左不变测度同时也是相对右不变测度. 反之亦然. 记此相对左不变测度为 ν. 则对每个 $s\in G$, 有

$$\Delta_\nu^r(s)=\Delta_\nu^l(s)\Delta_G^r(s).$$

证明 由命题 2.5.7 可知, 存在 G 的左 Haar 测度 μ, 使得

$$\nu(f)=\mu\left(\Delta_\nu^l f\right).$$

由命题 2.4.4, 可知

$$\nu(f)=\check{\mu}\left(\Delta_\nu^l\Delta_G^r f\right),$$

其中 $\check{\mu}$ 定义为 $\check{\mu}(f)=\mu(\check{f})$, 它是 G 的右不变 Haar 测度. 由命题 2.5.7, 可知 $\nu(f)$ 是相对右不变测度, 其右模恰为 $\Delta_\nu^l(s)\Delta_G^r(s)$. □

例 V 是实 n 维向量空间, 我们设 μ 为 V 的左 Haar 测度. 由命题 2.5.7, 为了构造相对左不变测度只要找 $V\to\mathbb{R}_+^\times$ 的连续同态. 这种同态必形如

$$\Delta(x)=e^{t(x)},$$

其中 t 为 V 到 $\mathbb{R}$ 的加法群的同态 (作为习题). 于是 V 中任何相对不变测度必形为

$$\nu(f)=\int_\nu f(x)e^{t(x)}d\mu(x).$$

设 H 为 G 的闭子群, 下面我们要证明 Weil 关于 G/H 上相对不变测度存在的充分必要条件的定理.

定理(A. Weil) 设 G 是局部紧的 Hausdorff 拓扑群, H 是 G 的闭子群. G 以左平移作用于 G/H 上, 则在 G/H 上存在一个以 Δ 为左模的相对不变测度 μ 的充分必要条件是

$$\Delta_H^r(t)=\Delta(t)\Delta_G^r(t),\quad \forall t\in H,$$

其中 Δ 是 G 到 $\mathbb{R}_+^\times$ 的连续同态, 除差一个常数因子外, μ 是唯一的.

证明 设 G/H 上存在以 Δ 为左模的相对不变测度 μ. 在 G 中可定义正测度 $\nu(f)=\mu(f^\circ)$, 对一切 $f\in C_c(G)$. 由命题 2.5.2, 对 $s\in G$, 有

$$\nu(sf)=\mu(sf^\circ)=\Delta_\nu^l(s)\mu(f^\circ)=\Delta_\nu^l(s)\nu(f).$$

因此, ν 是 G 上相对不变测度. 又由命题 2.5.2, 对 $t\in H$, 有

$$\nu(ft)=\mu\left((ft)^\circ\right)=\Delta_H^r(t)\mu\left(f^\circ\right)=\Delta_H^r(t)\nu(f).$$

由命题 2.5.8, 对 $s\in G$, 有

$$\nu(fs)=\Delta_\nu^l(s)\Delta_G^r(s)\nu(f).$$

比较两式, 可得

$$\Delta_H^r(t)=\Delta_\nu^l(t)\Delta_G^r(t).$$

反之, 设等式成立, 由命题 2.5.7, G 必存在以 Δ 为左模的相对不变测度, 假设它为 ν, 则 $\Delta=\Delta_\nu^l$. 下面我们证明: 若 $f^\circ=0$, 则 $\nu(f)=0$.

若 $f^\circ=0$, 即

$$\int_H f(xy)dy=0.$$

由命题 2.4.4, 有

$$\int_H f\left(xy^{-1}\right)\Delta_H^r\left(y^{-1}\right)dy=0.$$

对任一 $F\in C_c(G)$, 有

$$\begin{aligned}&\int_G F(x)\left(\int_H f\left(xy^{-1}\right)\Delta_H^r\left(y^{-1}\right)dy\right)d\nu(x)\\ =&\int_H \Delta_H^r\left(y^{-1}\right)\Delta_\nu^r(y)\left(\int_G f(x)F(xy)d\nu(x)\right)dy.\end{aligned}$$

比较所给等式

$$\Delta_H^r(y)=\Delta_\nu^l(y)\Delta_G^r(y),$$

和命题 2.5.8 中的等式

$$\Delta_{\nu}^{r}(y)=\Delta_{\nu}^{l}(y)\Delta_{G}^{r}(y),$$

可得

$$\Delta_{H}^{r}(y)=\Delta_{\nu}^{r}(y).$$

于是, 有

$$\int_{G} f(x)\left(\int_{H} F(xy)dy\right)d\nu(x)=\int F^{\circ}(\pi(x))f(x)d\nu(x)=0.$$

特别地取 F, 使得 F° 在 $\pi(\mathrm{supp}(f))$ 上为 1. 当 $f^{\circ}=0$ 时, 必有 $\nu(f)=0$. 这样我们可定义

$$\mu\left(f^{\circ}\right)=\nu(f).$$

由命题 2.5.5, 可知 μ 为在 $C_c(G/H)$ 上有定义的非零正测度. 注意到

$$\mu\left(sf^{\circ}\right)=\mu\left((sf)^{\circ}\right)=\nu(sf)=\Delta(s)\nu(f)=\Delta(s)\mu(f^{\circ}).$$

因此, μ 是 G/H 上左模为 Δ 的相对不变测度.

Δ 是确定的, 由命题 2.5.7 的系理可知, μ 除一常数因子外唯一确定.

系理 2.5.2 当 G 和 H 都是幺模群时, G/H 存在非零不变测度. 分别记 μ 和 ν 为 G/H 和 G 的不变测度, 则有

$$\nu(f)=\mu\left(f^{\circ}\right),\quad \forall f\in C_c(G).$$

证明 G 和 H 都是幺模群, $\Delta_{H}^{r}(t)=\Delta_{G}^{r}(t)=1$. 取 $\Delta=1$, 用 Weil 定理, 可得结论. □

由以上讨论可以得出

命题 2.5.9 当 G, H 为幺模群时, 有

$$\int_{G} f(x)dx=\int_{G/H}\left(\int_{H} f(xy)dy\right)dx^{\circ}.$$

命题 2.5.10 设 G 为局部紧的 Hausdorff 拓扑群. $H\supset S$ 是 G 的两个闭子群. $\pi: G/S\to G/H$. 对 $p\in G/H$, 固定 $q\in\pi^{-1}(p)$, $\varphi_p: H/S\to\pi^{-1}(p)$, $yS\mapsto qyS$. 若 G/S 存在有限 G 不变测度 μ, 则 G/H 及 H/S 分别存在有限 G 不变测度 μ_1,μ_2, 而且

$$\int_{G/S} /d\mu=\int_{G/H}\left(\int_{H/S} f^{\circ}\varphi_p d\mu_2\right)d\mu_1.$$

证明　在 G/H 上定义测度 μ_1 如下:

$$\mu_1(\nu) = \mu\left(\pi^{-1}(\nu)\right).$$

显然, μ_1 是 G/H 上的 G 不变测度, 而且

$$\mu_1(G/H) < \infty.$$

μ_1 是 G 不变的, 等价于 (由 Weil 定理)

$$\Delta_H(t) = \Delta_G(t), \quad \forall t \in H.$$

同理, 从 μ 在 G/S 上不变可得

$$\Delta_S(x) = \Delta_G(x), \quad \forall x \in S.$$

所以对 $x \in S$, 有

$$\Delta_H(x) = \Delta_S(x),$$

并且 H/S 有不变测度 μ_2(仍由 Weil 定理). 取 $f \in C_c(G/S)$, 对 $p \in G/H$, 设

$$f^\circ(p) = \int_{H/S} f \cdot \varphi_p d\mu_2.$$

因为 μ_2 是 H/S 上的不变测度, $f^\circ(p)$ 与 q 的选取无关, 且 $f^\circ \in C_c(G/H)$. 令

$$I_(f) = \int_{G/H} f^\circ d\mu_1.$$

显然, I 是对 G 在 G/S 上的作用不变的线性泛函. 因此, 它决定 G/S 上的一个不变测度 μ_0. 因为 G/S 上的不变测度只相差常数因子, 故可设 $\mu_0 = \mu$. 对 G/S 上的常函数 1 积分, 可得

$$\mu(G/S) = \mu_1(G/H)\mu_2(H/S).$$

因此, $\mu_2(H/S) < \infty$. □

2.6　卷　　积

在 2.3 节中我们曾简单提到过卷积. 现在, 我们将卷积的定义引入 $L^1(G)$ 和 $L^p(G)$ 中.

仍设 G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群, dx 是 G 上左 Haar 测度, μ 是 G 的有界复值测度, 即 $|\mu(G)| < \infty$.

设 T_μ 是作用在 G 的函数空间上的线性算子:

$$T_\mu f(x) = \int f\left(y^{-1}x\right) d\mu(y).$$

我们有

命题 2.6.1　假设 G, μ, T_μ 如上定义, $\mu(G) < \infty$, 则 $T_\mu : f \mapsto T_\mu f$ 是 $C_c(G)$ 到 $L^p(G)$ 的连续线性算子, 且对正整数 p, 有

$$\|T_\mu f\|_p \leqslant \|f\|_p \mu(G).$$

证明　显然, 只要证明这个不等式就能说明: 当 $f \in C_c(G)$ 时. $T_\mu f \in L^p(G)$. 这也就证明了连续性.

$p=1$ 时, 不等式显然成立. 当 $p>1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\|T_\mu f\|_p^p &= \int \left|\int f\left(y^{-1}x\right) d\mu(y)\right|^p dx \\
&\leqslant \int \left(\int \left|f\left(y^{-1}x\right)\right|^p d\mu(y)\right) \mu(G)^{\frac{p}{q}} dx \quad \text{(Hölder)} \\
&= \iint \left|f\left(y^{-1}x\right)\right|^p dx d\mu(y) \mu(G)^{\frac{p}{q}} \quad \text{(Fubini)} \\
&= \int \left(\int |f(x)|^p dx\right) d\mu(y) \mu(G)^{\frac{p}{q}} \quad (y \to yx) \\
&= \|f\|_p^p \mu(G)^p,
\end{aligned}$$

其中 q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 对两式开 p 次方就得到了不等式. □

由于 $C_c(G)$ 是 $L^p(G)$ 的稠密子集, 因此可以将 T_μ 的定义域扩展到 $L^p(G)$ 上. 我们有

命题 2.6.2　T_μ 是 $L^p(G)$ 到其自身的连续线性映射, 进一步, 有 $\|T_\mu f\|_p \leqslant \|f\|_p \mu(G)$.

命题 2.6.3　若 G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群, 则 $G \times G$ 亦然. 取 $d(x,y)$ 为 $G \times G$ 上的 Haar 测度, 则 $d(x,y) = d\left(y^{-1}x, y\right)$, 即 Haar 测度在变换 $(x,y) \mapsto \left(y^{-1}x, y\right)$ 之下不变.

证明　由 $G \times G$ 的 Haar 测度, 我们可定义积分

$$F \to \int_{G\times G} F(x,y) d(x,y).$$

另一方面,

$$F \to \int_G \left(\int_G F(x,y) dx\right) dy$$

也是不变测度. 由 Haar 测度的唯一性 (必要时, 将 $d(x,y)$ 乘以正因子), 可得

$$\int_{G\times G} F(x,y)d(x,y) = \int_G \left(\int_G F(x,y)dx\right) dy.$$

因为

$$\int_G F(x,y)dx = \int_G F\left(y^{-1}x,y\right) dx,$$

故得

$$\int_{G\times G} F(x,y)d(x,y) = \int_{G\times G} F\left(y^{-1}x,y\right) d(x,y). \qquad \square$$

设 $f,g\in L^1(G)$, 则 $g(x)f(y)\in L^1(G\times G)$. 因为 $(x,y)\mapsto \left(y^{-1}x,y\right)$ 是 $G\times G$ 到自身的同胚, 所以, 对几乎所有 x, 我们得出 G 上的函数. $y\mapsto g(y^{-1}x)f(y)$ 这个函数属于 $L^1(G)$, 即

$$\int g\left(y^{-1}x\right) f(y)dy < \infty.$$

设 $f\in L^1(G)$, 且 $d\mu = fdx$, 则

$$|\mu|(G) = \int |f|dx = \|f\|_1 < +\infty.$$

对 $g\in L^p(G)$, 有

$$T_\mu g(x) = \int g\left(y^{-1}x\right) d\mu(y) = \int g\left(y^{-1}x\right) f(y)dy.$$

由命题 2.6.2, T_μ 是 $L^p(G)$ 到 $L^p(G)$ 的线性算子. 于是, 我们可以定义

定义 2.6.1　设 $f\in L^1(G)$, $g\in L^p(G)$. 函数

$$(f*g)(x) = \int f(y)g\left(y^{-1}x\right) dy \in L^p(G)$$

几乎处处有定义. 我们称它为 f 与 g 的卷积.

习　题

1. 设 G 为局部紧的 Hausdorff 群. 考虑所有从 G 到 $\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}\bigcup\{+\infty\}$ 的函数. 称它为下半连续的, 是指对任意 $x_0\in G$, 或者有 $f(x_0)=-\infty$, 或者是 $f(x_0)>-\infty$, 且存在 h, 使得若 $f(x_0)>h$, 则存在 x_0 的邻域 V, 对任意 $x\in V$, 有 $f(x)>h$. 连续函数自然是下半连续的. 求证

(1) 对 $\{f_i\}_{i\in I}$, 每个 f_i 都下半连续 $\Rightarrow \sup_{i\in I} f_i = f$ 是下半连续.

(2) f,g 是下半连续, 则 $f+g$ 是下半连续 (除了在使 $f(x)=\infty$, $g(x)=-\infty$ 的点外).

(3) f 是下半连续的 $\Rightarrow$ 对任意 $\lambda > 0$, λf 是下半连续.

(4) 记

$$D(G) = \{f | f : G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}, f \text{ 下半连续}\},$$

$$D^+(G) = \{f | f \in D(G), f \geqslant 0\}.$$

f 是一个正函数, 则 $f = \sup\{g | g \leqslant f, g \in C_c^+(G)\}$ 当且仅当 $f \in D^+(G)$.

2. 设 G 是局部紧 Hausdorff 群, 则在 G 上有左 Haar 测度 μ. 我们在 $C_c(G)$ 上定义范数

$$\|f\|_1 = \mu(|f|).$$

沿用习题 1 的符号, 对于 $f \in D^+(G)$, 定义

$$\mu^*(f) = \sup\{\mu(g) | g \in C_c^+(G), g \leqslant f\}.$$

对于 $f \in C_c^+(G)$, 自然有 $\mu^*(f) = \mu(f)$. 因此 μ^* 是 μ 到 $D(G)$ 上的扩张, 我们仍记它为 μ, 记

$$\|f\|_1 = \mu(|f|),$$

$$D(G, \mu) = \{f | \|f\|_1 < +\infty\}.$$

显然有 $D(G, \mu) \supseteq C_c(G)$. 取 $C_c(G)$ 在 $D(G, \mu)$ 中的闭包, 记之为 $L^1(G)$. $L^1(G)$ 中的函数称之为可积函数. $\mu(f)$ 称之为 f 的积分, 也可写为 $\int f d\mu$. $L^1(G)$ 即是 $C_c(G)$ 是在 $\|\cdot\|_1$ 下的完备化, 它是 $D(G, \mu)$ 的线性子空间. 求证:

(1) $f \in L^1(G)$, 则 $|f| \in L^1(G)$,

(2) $f, g \in L^1(G)$, 则 $\sup(f, g)$ 与 $\inf(f, g)$ 都属于 $L^1(G)$.

3. 当常函数是可积函数时, 即 $\int_G d\mu < +\infty$, 我们称 G 存在有限测度. 记为 $\mu(G) = \int_G d\mu$.

设 V 是 G 的子集合, 定义 V 的特征函数 φ_V 如下:

$$\varphi_V(x) = \begin{cases} 1, & x \in V, \\ 0, & x \notin V. \end{cases}$$

如果 $\varphi_V(x) \in L^1(G)$, V 称为有有限测度的, 或称可测集. 此时, $\int_G \varphi_V d\mu$ 称为 V 的测度, 记为 $\mu(V)$. 显然, 集合的测度是非负实数, 我们约定空集测度为 0. 求证:

(1) 设 V_1 和 V_2 都是 G 的子集, 则有

$$\varphi_{V_1 \cup V_1} = \sup\{\varphi_{V_1}, \varphi_{V_2}\},$$

$$\varphi_{V_1 \cap V_1} = \inf\{\varphi_{V_1}, \varphi_{V_2}\}.$$

(2) 设 V_1, V_2 都是 G 中可测集, 则 $V_1 \bigcap V_2$, $V_1 \bigcup V_2$, $V_1 \bigcup (G \backslash V_2)$ 都是可测集.

(3) G 的子集 U 称为相对紧的, 如果 $\overline{U}$ 是紧集. 证明 G 中相对紧开子集是可测集.

(4) G 中紧子集是可测集.

4. 设 G 是局部紧的 Hausdorff 拓扑群, e 是 G 的单位元, μ 是 G 的左或右 Haar 测度. 证明:

(1) G 的拓扑是离散拓扑 $\Leftrightarrow \mu(\{e\}) > 0$.

(2) G 是紧群 $\Leftrightarrow \mu$ 是有界测度.

5. 设 G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群, 取 $\mu_1, \mu_2 \in M(G)$. 我们说 μ_1, μ_2 是可卷积的, 如果对一切 $f \in C_c(G)$, 函数 $f(x_1, x_2) \in L^{-1}(G \times G, \mu_1 \otimes \mu_2)$, 其中 $\mu_1 \otimes \mu_2$ 是乘积测度 ([Zhu 86], 第五章). 求证:

(1) $f \mapsto \displaystyle\int_G \int_G f(x_1, x_2) d|\mu_1|(x_1) d|\mu_2|(x_2)$, 是 G 上的测度, 它称为 μ_1, μ_2 的卷积, 记为 $\mu_1 * \mu_2$.

(2) $(\mathbb{M}^1(G), \|\cdot\|)$ 对卷积乘法是 Banach 代数.

(3) 固定 G 的一个左测度, 则 $L^1(G)$ 是 $\mathbb{M}^1(G)$ 的闭 (双边) 理想.

(4) $\mathbb{M}^1(G)$ 是交换代数 $\Leftrightarrow G$ 是交换群.

第 3 章　局部紧交换群

如果实变函数 f 有周期性质 $f(x+1)=f(x)$, 则可以把 f 看成商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上的函数. 关于周期函数最重要的现象便是 Fourier 级数深刻的理论. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是最简单的紧交换拓扑群. 在紧交换拓扑群上是有 Fourier 级数理论的. 最简单的局部紧交换拓扑群便是实数加法交换群, 有拓扑, 可以谈连续函数; 有测度, 可以谈积分, 谈 Fourier 积分 ([BC49], [SW71]). 本章就是把实数上的一些基本的分析推广到局部紧交换群上.

本章所考虑的拓扑群都是局部紧的 Hausdorff 交换群.

3.1 对　偶　群

定义 3.1.1　设 $S=\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}$, 则它是紧交换群. G 为拓扑群. 我们称拓扑群的连续同态 $\mathscr{X}:G\to S$ 为 G 的特征标 (也可称为酉特征标). 以 $\hat{G}$ 记 G 的全部特征标. 若 $\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2\in\hat{G}$, 定义

$$(\mathscr{X}_1\mathscr{X}_2)(x)=\mathscr{X}_1(x)\mathscr{X}_2(x),\qquad \forall_x\in G.$$

对于这个乘法, $\hat{G}$ 构成交换群. 在 $\hat{G}$ 上取紧开拓扑如下: 对 G 的任意紧子集 K 和 $\varepsilon>0$, 设

$$U(K,\varepsilon)=\{\mathscr{X}\in\hat{G}||\mathscr{X}(x)-1|<\varepsilon,\forall_x\in K\}.$$

从下面命题 3.1.1 可知, 对 G 的一切紧集 K 和 $\varepsilon>0$, $\{U(K,\varepsilon)\}$ 构成单位特征标的开基, $\hat{G}$ 称为 G 的对偶群.

命题 3.1.1　$\hat{G}$ 对紧开拓扑是局部紧交换拓扑群.

证明　不难验证, $\{U(K,\varepsilon)\}$ 满足命题 1.3.1 中 1)~4). 现在我们以 2) 为例证明.

设 $\mathscr{X}\in U(K,\varepsilon)$, 因为 $\mathscr{X}$ 是连续的, K 是紧的, 所以

$$\max\{|\mathscr{X}(x)-1||x\in K\}=\alpha<\varepsilon.$$

于是, 对于 $\mathscr{X}\in U(K,\varepsilon)$, 存在 $V=U(K,\varepsilon-\alpha)$, 使得 $V\mathscr{X}\subseteq U(K,\varepsilon)$.

下面证明 $\hat{G}$ 是局部紧的. 设

$$W_n=\left\{e^{2\pi i\alpha}\Big||\alpha|<\frac{1}{3n}\right\},$$

K 为 G 的单位元的紧闭邻域, W 为 $1 \in S$ 的闭邻域, 且 $W \subseteq W_1$. 可以证明

$$U(K,W) = \{\mathscr{X} \in \hat{G} | \mathscr{X}(K) \subseteq W\}$$

是 $\hat{G}$ 的紧闭子集

在 G 上取离散拓扑, 所得的拓扑群记为 G_*, 则 $\hat{G}_*$ 为紧群. 这是因为: 对于 $x \in G$, 取 S_x 与 S 同构, 则 $\prod\limits_{x\in G} S_x$ 为紧群, 而

$$\hat{G}_* = \left\{\theta \in \prod_{x\in G} S_x | \theta(xy) = \theta(x)\theta(y)\right\}$$

是闭子群. $\mathscr{X} \in \hat{G}$ 可看成 $\hat{G}_*$ 的元素 $\mathscr{X}_*$, 于是有单映射 $\hat{G} \to \hat{G}_* : \mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}_*$. 只需证明对诱导拓扑 $\varphi : U(K,W) \to U(K,W)_*$ 是双连续的且 $U(K,W)_*$ 是闭集即可.

$U(K,W)$ 中的任意邻域形如

$$U(K,W) \cap U(K_1, W_{\frac{n}{2}}),$$

其中 K_1 为 G 的紧子集. 取 G 的单位元邻域 V, 使得 $V^n \subset K$, 则存在有限集 $F \subset G$, 使得 $K_1 \subset FV$. 记

$$U_*(F, W_n) = \{\theta \in \hat{G}_* | \theta(F) \subseteq W_n\}.$$

则

$$U(K,W)_* \cap U_*(F, W_n)$$

是 $U(K,W)_*$ 的邻域. 显然,

$$U(K,W)_* \cap U_*(F, W_n) \subseteq U(K,W) \cap U(K, W_{\frac{n}{2}}).$$

因此, φ 是双连续的.

现在设 θ 属于 $U(K,W)_*$ 在 $\hat{G}_*$ 中的闭包. 显然 $\theta(K) \subseteq W$. 对任意正整数 n, 取 G 的单位元邻域 V, 使得 $V^n \subseteq K$, 则 $x \in V \Rightarrow \theta(x) \in W_n$. 因此对任意邻域 W_n, 存在单位元的邻域 V, 使得 $\theta(V) \subseteq W_n$, 即 θ 连续, 于是 $\theta \in U(K,W)_*$. □

系理 3.1.1　(1)G 为离散拓扑群 $\Rightarrow \hat{G}$ 为紧拓扑群.

(2)G 为紧拓扑群 $\Rightarrow \hat{G}$ 为离散拓扑群.

证明　在命题 3.1.1 的证明中, 取 $K = \{e\}$, 便得到 (1). 从 $U(G, W_1) = \{1\}$, 可得 (2). □

例 3.1.1　$\mathbb{Z} = S$.

我们有单映射 $\mathbb{Z} \to S : \mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}(1)$, 其逆为 $S \to \mathbb{Z} : z \mapsto \mathscr{X}_z$, 其中 $\mathscr{X}_z$ 是 $\hat{\mathbb{Z}}$ 的元, 它满足 $\mathscr{X}_z(1) = z$. 不难验证, 这便是所需的拓扑群同构.

例 3.1.2 $\hat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}$.

对于 $y\in\mathbb{R}$, 设 $\mathscr{X}_y(x)=e^{ixy}$. 只要证明 $\mathbb{R}\to\hat{\mathbb{R}}$, $y\to\mathscr{X}_y$, 为满映射. 对任意 $\mathscr{X}\in\hat{\mathbb{R}}$, 考虑闭子群

$$K=\{x\in\mathbb{R}|\mathscr{X}(x)=1\}.$$

有三个可能性:

(1)$K=\mathbb{R}$, 这时 $\mathscr{X}=\mathscr{X}_0$.

(2)$K=\{0\}$. 但因 $\mathscr{X}$ 的像集连通, 必有 $a\in(0,1]$, $m\in\mathbb{Z}$, 使得 $\mathscr{X}(a)=e^{2xi/m}$. 因此这种情况不会出现.

(3)$K=\{kb|k\in\mathbb{Z}\}$, b 是最小的正实数 x, 使得 $\mathscr{X}(x)=1$. 此时, 可设

$$\mathscr{X}(b/4)=e^{\pi i/2}$$

(否则以 $\mathscr{X}$ 代替 $\mathscr{X}$). 若 $k>1$, 且

$$\mathscr{X}(b/2^k)=e^{2\pi i/2^k}, \tag{$*$}$$

则

$$\mathscr{X}(b/2^{k+1})=e^{2\pi i/2^{k+1}}(\text{或}\quad e^{2\pi i/2^{k+1}+xi}).$$

后一情况不会发生, 否则, $\mathscr{X}([b/2^{k+1},b/2^k])$ 为 S 紧连通子集, 它必包含 1 或 -1, 这样有 $a\in(b/2^{k+1},b/2^k)$, 使得 $\mathscr{X}(a)=1$ 或 -1. 于是, $\mathscr{X}(2a)=1$, 而 $2a<\dfrac{b}{2^{k-1}}\leqslant b$, 这与 b 的选取矛盾. 因此, 对任意 k 有 $(*)$ 成立. 由于 $\mathscr{X}$ 连续, 且任意实数 x 可用形如 $\pm\displaystyle\sum_{K=N}^{M}2^{-K}b$ 的数来逼近, 故总有 $\mathscr{X}(xb)=e^{2\pi ix}$, 即 $\mathscr{X}=\mathscr{X}_{2\pi/b}$.

下面讨论对偶群的若干性质.

命题 3.1.2 设 G_1, G_2 为局部紧交换群. 对于 $\mathscr{X}_i\in G_i$, $x_i\in G$, $i=1,2$, 令 $\theta(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)(x_1,x_2)=\mathscr{X}_1(x_1)\mathscr{X}_2(x_2)$, 则 $\theta:\hat{G}_1\times\hat{G}_2\to\widehat{G_1\times G_2}$ 为拓扑同构.

证明 设 $\psi\in\widehat{G_1\times G_2}$. 取 $\mathscr{X}_1(x_1)=\psi(x_1,e_2)$, $\mathscr{X}_2(x_2)=\psi(e_1,x_2)$, 则 $\psi=\theta(\mathscr{X}_1,\mathscr{X}_2)$, 故 θ 为满映射, 不难证明 θ 为群同构.

若 $U(K,\varepsilon)$ 为 $\widehat{G_1\times G_2}$ 单位元的邻域, 取 K_i 为 K 在 G_i 的投影, 则

$$\theta\Big(U\Big(K_1,\frac{\varepsilon}{2}\Big)\times U\Big(K_2,\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big)\subset U(K,\varepsilon).$$

反之, 若 $U(K_i,s_i)$ 为 $\hat{G}_i$ 的单位元邻域, $i=1,2$. 取 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $K=(K_1\cup e_1)\times(K_2\cup e_2)$, 则

$$U(K,\varepsilon)\subset\theta(U(K_1,\varepsilon_1)\times U(K_2,\varepsilon_2)).$$

这就证明了 θ 是同胚. □

定义 3.1.2　设 A 为局部紧交换群 G 的子集, 令

$$A^{\perp}=\{\mathscr{X}\in\hat{G}|\mathscr{X}(A)=1\}.$$

称 $A^{\perp}$ 为 A 在 $\hat{G}$ 中的零化子.

命题 3.1.3　设 H 是局部紧交换群 G 的子群, 则有如下的拓扑同构:

(1)$G/H\cong H^{\perp}$, 当 H 是闭子群.

(2)$\hat{G}/H^{\perp}\cong\hat{H}$, 当 H 是开子群.

证明　(1)$\pi:G\to G/H$ 为商同态. 显然, 映射 $\sigma:G/H\to H^{\perp},\psi\mapsto\psi\circ\pi$ 为群同态. 设 $\mathscr{X}\in H^{\perp}$, 取 $\psi:G/H\to S, xH\mapsto\mathscr{X}(x)$, 则 ψ 是连续的, 并且 $\sigma(\psi)=\mathscr{X}$. 另一方面, 容易证明 $\sigma(\psi)=1\Rightarrow\psi=1$. 设 K 是 G 的紧子集, 则 $\{xH|x\in K\}$ 是 G/H 的紧子集. 反之, G/H 的任一紧子集均有此种形式 (见命题 2.5.3). 对 $\varepsilon>0$, 有

$$\begin{aligned}&\sigma(\{\psi\in\widehat{G/H}||\psi(xH)-1|<\varepsilon,\text{其中}x\in K\})\\=&\{\mathscr{X}\in H^{\perp}||\mathscr{X}(x)-1|<\varepsilon,\text{其中}x\in K\}.\end{aligned}$$

所以, σ 把 G/H 的单位元开基映为 $H^{\perp}$ 的单位元的开基. 故 σ 为同胚.

(2) 对 $\mathscr{X}\in\hat{G}$, 以 $\rho(\mathscr{X})$ 记 $\mathscr{X}|_H$. 现设 $\phi\in\hat{H}$, $x\notin H$, $H_1=\{x^nh|h\in H,n\in\mathbb{Z}\}$. 若对一切 $n\geqslant 2$, $x^n\notin H$, 设 $\phi_1(x^nh)=\phi(h)$. 若存在最小 k, 使得 $x^k\in H$, 设 $z\in S$, 使得 $z^k=\phi(x^k)$. 这时, 取 $\phi(x^nh)=z^n\phi(h)$, 便将 ϕ 扩张到 H_1 上. 用 Zorn 引理, 可将 ϕ 扩张为同态 $\mathscr{X}:G\to S$. 因为 H 是开子群, ϕ 为连续, 所以扩张所得的 $\mathscr{X}$ 亦为连续. 显然, $\rho(\mathscr{X})=\phi$. 于是我们有群正合序列

$$1\to H^{\perp}\to\hat{G}\xrightarrow{\rho}\hat{H}\to 1.$$

若 C 为 H 的紧子集, 则

$$\rho^{-1}\{\phi\in\hat{H}|\ |\phi(x)-1|<\varepsilon,x\in C\}=U(C,\varepsilon).$$

因为 C 也是 G 的紧子集, 故 ρ 是连续. 反过来, 设

$$W_0=\left\{z\in S|\ |z|<\frac{1}{2}\right\},\quad W=\left\{z\in S|\ |z|\leqslant\frac{1}{2}\right\},$$

$$U_G(C,W_0)=\{\mathscr{X}\in\hat{G}|\mathscr{X}(C)\subset W_0\},$$

$$U_H(C,W_0)=\{\phi\in\hat{H}|\phi(C)\subset W_0\},$$

等等, 则开集 $U_G(C,W_0)$ 的闭包 $U_G(C,W)$ 是紧子集. $U_G(C,W_0)$ 生成的 $\hat{G}$ 的子群记为 X, $U_H(C,W_0)$ 生成的子群记为 Y. X,Y 分别是 $\hat{G}$, $\hat{H}$ 的开子群, 它们都是局

部紧的. X 又是 σ-紧的. $\rho(U_G(C,W_0)) = U_H(C,W_0) \Rightarrow \rho(X) = Y$. 由命题 1.3.5, 可得 ρ 为开映射, 因此 ρ 即为所需的拓扑同构. □

当 G 是局部紧交换群时, G 有充分多的特征标, 确切地说, 有以下命题.

命题 3.1.4 如果 G 是局部紧交换群, 则对任意 $x \in G$, $x \neq e$, 存在 $\mathscr{X} \in \hat{G}$, 使得 $\mathscr{X}(x) \neq 1$.

证明 因为 G 的所有酉表示都是 1 维的, 利用 Gelfand Raikov 定理 [1], 便得命题. □

定义 3.1.3 固定 $x \in G$. 定义

$$\begin{aligned} \delta(x) : \hat{G} &\to S, \\ \mathscr{X} &\mapsto \mathscr{X}(x). \end{aligned}$$

δ 是 $G \to \hat{G}$ 的映射. 称 S 为对偶同态.

命题 3.1.5 $\delta : G \to G$ 是连续单同态

证明 对 $\mathscr{X}, \psi \in \hat{G}$, $\mathscr{X}\psi^{-1} \in U(\{x\},\varepsilon) \Rightarrow |\delta(x)(\mathscr{X}) - \delta(x)(\psi)| < \varepsilon$, 所以 $\delta(x)$ 连续, 即 $\delta(x) \in \hat{G}$.

现在证明 δ 在 e 处连续. 设 Y 是 $\hat{G}$ 的紧集, $\varepsilon > 0$. 取 W 是 G 的单位元开邻域, 使得 $\overline{W}$ 是紧集. $U(\overline{W},\varepsilon/2)$ 为 $1 \in \hat{G}$ 的邻域. 设 Y 被 $\mathscr{X}_1 U(\overline{W},\varepsilon/2), \cdots, \mathscr{X}_m U(\overline{W},\varepsilon/2)$ 所覆盖. 取 G 的单位元开邻域 V, 使得 $V \subset W$, 并且对 $x \in V$, $1 \leqslant j \leqslant m$, 有 $|\mathscr{X}_j(x) - 1| < \varepsilon/2$. 这时, 对任意 $x \in V$, $\mathscr{X} \in Y$, 必存在 j, 使得

$$|\mathscr{X}(x) - 1| \leqslant |\mathscr{X}_j(x) - 1| + |\mathscr{X}_j(x) - \mathscr{X}(x)| < \varepsilon.$$

这样我们便证明了: 对 $\hat{G}$ 中 1 的任意开邻域 $U(Y,\varepsilon) \subseteq \hat{\hat{G}}$, 必存在 e 的开邻域 V, 使得 $\delta(V) \subseteq U(Y,\varepsilon)$.

容易证明, δ 为群同态. 又因为 G 有充分多特征标, 故 δ 为单同态. □

例 3.1.3 考虑 $\delta : \mathbb{R} \to \hat{\hat{\mathbb{R}}}$. 对 $x \in \mathbb{R}$, $\delta(x) : \hat{\mathbb{R}} \to S$, $\mathscr{X}_y \mapsto e^{ixy}$. 由于 $\hat{\mathbb{R}}$ 与 $\mathbb{R}$ 同构, 故 $\hat{\mathbb{R}}$ 的每一个特征必然形如 $\mathscr{X}_y \to e^{iay}$, 其中 $a \in \mathbb{R}$. 因此 δ 是满的.

本章的一个重要结论是: δ 是一个同构, 即 3.3 节中的对偶定理. 下面我们为此作一系列准备工作.

引理 3.1.1 设 G 是紧交换群, Y 是 $\hat{G}$ 的子群. 如果对 G 中任意元素 $x \neq e$, 存在 $\mathscr{X} \in Y$, 使得 $\mathscr{X}(x) \neq 1$, 则 $Y = \hat{G}$.

证明 设

$$A = \left\{ \sum_{j-1}^{m} \alpha_j \mathscr{X}_j \middle| \alpha_j \in C, \mathscr{X}_j \in Y \right\}.$$

---

1) 我们在下一章将证明 Geltand Raikov 定理. 它与本章的理论时彼此独立的.

以 $C(\hat{G})$ 表示 $\hat{G}$ 在 C 上群代数, 则 A 是 $C(\hat{G})$ 的子代数, 且满足 Stone-Weierstrass 定理的条件, 故知 A 是 $C(\hat{G})$ 的一致稠密子集. 如果存在 $\psi \in \hat{G}\backslash Y$, 则必定有 $\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathscr{X}_j \in A$, 使得

$$\left\| \psi - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathscr{X}_j \right\| < 1.$$

范数是在 $L^2(G)$ 上取的, 其中 $\mathscr{X}_j$ 各不相同, 也与 ψ 不相同. 注意对 $\mathscr{X} \in \hat{G}$, 有

$$\int_G \mathscr{X}(x)dx = \begin{cases} 0, & 若 \mathscr{X} \neq 1, \\ 1, & 若 \mathscr{X} = 1. \end{cases}$$

所以, 有

$$\begin{aligned} 1 > \int_G |\psi - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mathscr{X}_j|^2 dx = & \int_G \psi\psi dx - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \int_G \mathscr{X}_j \psi dx \\ & - \sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha}_j \int_G \overline{\mathscr{X}}_j \psi dx + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} \alpha_j \overline{\alpha}_k \int_G \mathscr{X}_j \overline{\mathscr{X}}_k dx \\ = & 1 + \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j|^2 \geqslant 1. \end{aligned}$$

因此 $Y = \hat{G}$. □

命题 3.1.6　若 G 为离散交换群, 则 $\delta : G \to \hat{\hat{G}}$ 为拓扑同构.

证明　G 离散 $\Rightarrow \hat{\hat{G}}$ 紧. $\delta(G) \subseteq \hat{\hat{G}}$. 由于 δ 是单映射, 故 $\delta(G)$ 满足引理 3.1.1 的条件, 所以 $\delta(G) = \hat{\hat{G}}$, 且 $\hat{\hat{G}}$ 也是离散群. δ 自然是拓扑同构. □

引理 3.1.2　如果 G 是局部紧交换群, H 是 G 的闭子群, $x \in G$, $x \notin H$, 则存在 $\mathscr{X} \in H^{\perp}$, 使得 $\mathscr{X}(x) \neq 1$.

证明　取 $\sigma : \widehat{G/H} \to H^{\perp}$, $\psi \mapsto \psi o \pi$. 由命题 3.1.4, 存在 $\psi \in \widehat{G/H}$, 使得 $\psi(xH) \neq 1$, $\sigma(\psi) \in H^{\perp}$, $\sigma(\psi)(x) = \psi(xH) \neq 1$. □

命题 3.1.7　若 G 是紧交换群, 则 $\delta : G \to \hat{\hat{G}}$ 是拓扑同构.

证明　由于 G 是紧的, 所以 $\hat{G}$ 是离散的, 即 $\hat{\hat{G}}$ 是紧的. δ 连续, 因此 $\delta(G)$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 的紧子集, 故为闭子群. 若 $\delta(G) \neq \hat{\hat{G}}$, 由引理 3.1.2, 可知有 $\hat{\hat{G}}$ 的特征标 ψ, 使 $\psi \neq 1$, 但 $\psi(\delta(G)) = 1$. 对 $\hat{G}$, 利用命题 3.1.6, 得到 $\mathscr{X} \in \hat{G}$, $\mathscr{X} \neq 1$, 使得对一切 $\omega \in \hat{\hat{G}}$, $\psi(\omega) = \omega(\mathscr{X})$. 这样对一切 $x \in G$, 有 $\psi(\delta(x)) = \delta(x)(\mathscr{X}) = \mathscr{X}(x) = 1$. 这与 $\mathscr{X} \neq 1$ 矛盾. 因此 δ 是紧空间上的单、满映射, 故 δ 是同胚. □

3.2 紧生成交换群的结构和对偶

定义 3.2.1 我们称拓扑群 G 是紧生成的, 如果 G 有紧子集 K, 使得 K 生成的子群是 G, 即

$$G = \{e\} \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cup K^{-1})^n.$$

命题 3.2.1 设 K 是局部紧群 G 的紧子集, 则 G 有一个紧生成子群 $H \supset K$, 它既是开的又是闭的.

证明 对 $x \in K \cup \{e\}$, 取开邻域 U_x, 使得 $\overline{U}_x$ 是紧集. $K \cup \{e\}$ 是紧集 $\Rightarrow$ 存在 $x_1, \cdots, x_n$, 使得 $K \cup \{e\} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{xk}$. 取 $U = \bigcup\limits_{k=1}^{n} U_{xk}$, 则 U 是包含 $K \cup \{e\}$ 的开集, 且 $\overline{U}$ 为紧集. 令 $H = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (U \cap U^{-1})^n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\overline{U} \cap \overline{U}^{-1})^n$(开子群也是闭子群). 显然 H 满足命题所求. □

命题 3.2.2 设 G 是紧生成局部紧交换群, 则 G 有离散子群 N, 使得 N 由有限个线性无关元生成, 并且 G/N 是紧群.

证明 设 G 由紧子集 K 生成. 如同命题 3.2.1 一样, 存在开集 $V \supset K \cup \{e\} \cup K^{-1}$, 使得 $\overline{V}$ 是紧集, 且 $V = V^{-1}$. 于是, $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \times V^n$. 由于 $(\overline{V})^2$ 是紧集, 且 $GV = G$, 则存在 $a_1, \cdots, a_m \in G$, 使得 $V^2 \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} a_j V$. 以 A 记 $a_1, \cdots, a_m$ 所生成的 G 的子群, 则 $V^2 \subset AV$, 于是有 $AV^2 \subset A^2V \subset AV$, $V^3 = V^2 \cdot V \subset AV^2 \subset AV$, $V^4 = V^3 \cdot V \subset AV^2 \subset AV$, $\cdots$, 所以有 $G = AV$. 以 C_j 记 a_j 生成的子群, 则 $G = \overline{C}_1 \overline{C}_2 \cdots \overline{C}_m \overline{V}$. 如果 $\overline{C}_1, \cdots, \overline{C}_m$ 是紧集, 则 G 是紧集. 取 $N = \{e\}$, 即可得证. 若 $\overline{C}_j$ 不是紧集, $\overline{C}$ 是 G 的无限循环子群. 设 b_1 是第一个使 $\overline{C}_j$ 不是紧集的 a_j, 归纳定义其余的 b_j. 假设已从 $a_1, \cdots, a_m$ 中选出 $b_1, b_2, \cdots, b_k$, 使得 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 生成 G 的离散子群 N_k, 而且 $b_1, \cdots, b_k$ 线性无关 (即如 $b_1^{\alpha_i}, \cdots, b_k^{\alpha_k} = e$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, 则 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$). 若 G/N_k 是紧群, 则取 $N = N_k$. 若 G/N_k 不是紧群, 考虑商同态 $\varphi : G \to G/N_k$. $G/N_k = \overline{\varphi(A)}\varphi(\overline{V}) \Rightarrow \overline{\varphi(A)}$ 不是紧集. 因为 $\varphi(\overline{A}) \subset \varphi(\overline{C}) \subset \cdots \subset \overline{\varphi(C_m)}$, 所以存在 $\overline{\varphi(C_j)}$, 它不是紧集. 因此, $\varphi(C_j)$ 是 G/N_k 的无限循环子群. 于是 $b_j, \cdots, b_k, a_j$ 线性无关. 取 $b_{k+1} = a_j$, N_{k+1} 为由 $b_1, \cdots, b_{k+1}$ 所生成的 G 的子群. 根据归纳假设, 有 G 的单位元开邻域 W, 使 $W \cap N_k = \{e\}$, 并且对 $v \in W$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ 有 $vN_k \cap b_{k+1}^n N_k = \varnothing$, 故 $W \cap N_{k+1} = \{e\}$, 即 N_{k+1} 亦为 G 的离散子群. 因为 a_j 个数有限, 所以必存在满足命题要求的 N_1, 使 G/N_1 为紧群. □

命题 3.2.3 如果连通局部紧交换群 G 有离散子群 N, 使得 $G/N \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$, m 为非负整数, 则存在拓扑同构 $G \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^a \times \mathbb{R}^b$, 其中 a, b 为非负整数.

证明 以 φ 记同态 $G \to G/N \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$, ψ 为商同态 $\mathbb{R}^m \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$. 在 $\mathbb{R}^m$ 内取原点 O 的开邻域 U_0, 使得 $U_0 = -U_0 ... (U_0 + U_0) \cap \mathbb{Z}^m = \{0\}$. 取 G 的单位元邻域 V_0, 使得 $V_0 = V_0^{-1}$, $V_0^2 \cap N = \{e\}$ 且 $\varphi(V_0) \subset \psi(U_0)$. 取 $\alpha > 0$, 使得 $U = \{x \in \mathbb{R}^m | \|x\| < \alpha\} \subset U_0 \cap \psi^{-1}(\varphi(V_0))$. 设 $V = V_0 \cap \varphi^{-1}(\psi(U))$. 这样, $\psi|_U$, $\phi|_V$ 是单映射, 且 $\varphi(V) = \psi(U)$. 于是, 对 $x \in U$, 存在唯一的 $\Psi(x) \in V$, 使得 $\varphi(\Psi(x)) = \psi(x)$. 显然, 若 $x, y, x+y \in U$, 则 $\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)$, $\Psi(-x) = \Psi(x)^{-1}$.

若有非零整数 n_1, n_2 和 $y_1, y_2 \in U$, 使得 $n_1 y_1 = n_2 y_2$, 则对 $k = 0, \pm 1, \cdots, \pm n_2$, 有 $\left\|\dfrac{k y_2}{n_2}\right\| \leqslant \|y_2\|$, $y_2 \in U \Rightarrow \dfrac{k y_2}{n_2} \in U \Rightarrow \Psi(y_1) = \left(\Psi\left(\dfrac{y_1}{n_2}\right)\right)^{n_2}$. 同理, $\Psi(y_2) = \left(\Psi\left(\dfrac{y_2}{n_1}\right)\right)^{n_1}$. 于是 $n_1 y_1 = n_2 y_2 \Rightarrow \Psi(y_1)^{n_1} = \Psi(y_2)^{n_2}$. 这样, 对任意 $x \in \mathbb{R}^m$, 总存在 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $y \in U$, 使得 $x = ny$. 我们定义 $\Psi(x) = (\Psi(y))^n$. 因此, 有群同态 $\Psi : \mathbb{R}^m \to G$. 在 $\Psi(\mathbb{R}^m)$ 内可以找到 G 的单位元开邻域 W, 使 $W = W^{-1}$. 这时, $\Psi(\mathbb{R}^m)$ 包含 G 是开闭子群 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} W^n$, 而 G 是连通的, 因此 $\Psi(\mathbb{R}^m) = G$.

不难证明 Ψ 是连续开同态. 以 K 记 Ψ 的核, U 生成 $\mathbb{R}^m$, 故有 $\varphi \circ \Psi = \psi$, 于是 $K \subseteq \mathbb{Z}^m$. 若 K 为 0, 则 G 与 $\mathbb{R}^m$ 拓扑同构. 若 K 不为 0, 必有 $\mathbb{Z}^m$ 的基 $e_1, \cdots, e_m$ 和正整数 $d_1, \cdots, d_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, 使得 $d_1 e_1, \cdots, d_k e_k$ 是 K 的基, 以 $e_1, \cdots, e_m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的基, 则

$$\mathbb{R}^m / K = \left\{ \sum_{j=1}^{m} x_j e_j \middle| 0 \leqslant x_i < d_i (1 \leqslant j \leqslant k), x_j \in \mathbb{R} \right\}.$$

所以 G 拓扑同构于 $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ □

命题 3.2.4 设局部紧交换拓扑群 G 有一个有限生成离散子群 N, 使得 G/N 拓扑同构于 $S^n \times F_0$, 其中 n 为非负整数, $S = \{z \in C | |z| = 1\}$, F_0 为有限群, 则存在非负整数 a, b, c 和有限交换群 F, 使得

$$G \cong S^a \times \mathbb{R}^b \times \mathbb{Z}^c \times F.$$

证明 记商同态 $G \to G/N$ 为 φ, 投射 $\rho : S^n \times F_0 \to S^n$. 可设 $G/N = S^n \times F_0$. 则 $\rho \circ \varphi : G \to \mathbb{S}^n$ 是连续的, 开且满同态. 以 M 记 $\rho \circ \varphi$ 的核, 它是有限个各不相交的陪集的并集: $M = N \cup x_1 N \cup \cdots \cup x_k N$. 所以 M 是 G 的有限生成离散子群. 这样, $G/M \cong S^n$.

如果 $n = 0$, $G = M$ 是有限交换群, 那么, 它必须如 $\mathbb{Z}^c \times F$.

如果 $n > 0$, 由于 M 离散, 所以 G 有单位元邻域 U, 使得 $\rho \circ \varphi|_U$ 是单映射, 故 $\rho \circ \varphi|_U : U \to \rho \circ \varphi(U)$ 是同胚. 因为 S^n 是 (局部) 连通, 所以可假设 U 连通,

且 $U=U^{-1}$. 于是, $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}U^j$ 是 G 的连通开子群, 也是闭子群, 因而也必是 G 的单位元的连通分支 G^0. 由于 S^n 连通, 所以 $\rho\circ\varphi(U)$ 生成 S^n, 即 $S^n=\rho\circ\varphi(G^0)$, 这样, $S^n=G^0/G^0\cap M$. 由命题 3.2.3, 可得 $G^0\cong S^k\times\mathbb{R}^{n-k}$. 又因 $G=G^0M$, 所以 $G/G^0\cong G^0M/G^0\cong M/M\cap G^0$(注意 G^0M/G^0 与 $M/M\cap G^0$ 都是离散拓扑群. 因此, 上述群同构自然是拓扑同构). 于是, G/G^0 是有限生成交换群. 存在非负整数 c 及有限交换群 F, 使得 $G/G^0\cong\mathbb{Z}^c\times F$. 因为 $\rho\circ\varphi(G^0)=S^n$, 所以对任意 $x\in G^0$ 和非负整数 n, 存在 $y\in G^0$, 使得 $x=y^n$. 故 $G\cong G^0\times(G/G_0)$, 于是

$$G\cong S^k\times\mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{Z}^c\times F.$$

□

命题 3.2.5 设 G 为紧交换群. U 为 G 的单位元开邻域, 则存在闭子群 H, 使得 $H\subset U$, 并且 $G/H\cong S^a\times F$, 其中 a 为非负整数, F 为有限群.

证明 考虑对偶同构 $\delta:G\to\hat{\hat{G}}$. $\hat{G}$ 是离散群, $\hat{\hat{G}}$ 的单位元邻域 $\delta(U)$ 必包含邻域 $U(\Sigma,\varepsilon)$, 其中 Σ 为 $\hat{G}$ 的有限子集, $\varepsilon>0$. Σ 生成 $\hat{G}$ 的子群 Y, $Y^{\perp}\subseteq U(\Sigma,\varepsilon)$. 由有限生成交换群结构可知 $Y\cong\mathbb{Z}^a\times F$, 其中 a 为非负整数, F 为有限群. 设 $H=\delta^{-1}(Y^{\perp})$, 则 $H\subset U$, 而且

$$G/H\cong\hat{\hat{G}}/Y^{\perp}\cong\hat{Y}\cong S^a\times F.$$

□

命题 3.2.6 设 G 是紧生成局部紧交换群, U 是 G 的单位元开邻域, 则 U 包含紧子群 K, 使得 $G/K\cong S^a\times\mathbb{R}^b\times\mathbb{Z}^c\times F$, 其中 a,b,c 为非负整数, F 为有限交换群.

证明 G 有有限生成离散子群 N, 使得 G/N 为紧群 (命题 3.2.2). $G\to G/N$ 为商同态. 取 W 为 G 的单位元开邻域, $\rho(W)$ 为紧群 G/N 的单位元开邻域. 由命题 3.2.5, G/N 有闭子群 $K_1\subset\rho(W)$, 使得 $(G/N)/K_1\cong S^a\times F$. a 为非负整数, F 为有限群. 设 $K_0=(K_1)$, $K=K_0\cap W$. 我们可以假设 W 满足以下条件: $W=W^{-1}$, $\overline{W}$ 是紧集, $W\subset U$, $W^3\cap N=\{e\}$. 不难证明: (i) $\rho(K)=K_1$; (ii) $\rho|_k:K\to K_1$ 是同胚; (iii) K 紧; (iv) K 是 G 的子群; (v) $K_0=KN$(例如 (iv): $x,y\in K\Rightarrow xy^{-1}\in K_0$ $\Rightarrow$ 存在 $k\in K$, 使 $\rho(xy^{-1})=\rho(k)\Rightarrow xy^{-1}k^{-1}\in N\cap W^3=\{e\}\Rightarrow xy^{-1}\in K$).

$N\cap K\subset N\cap W^3=\{e\}\Rightarrow$ 开集 $(G\backslash N)\cup\{e\}$ 包含紧集 $K\Rightarrow G$ 有单位元开邻域 V, 使得 $KV\subset(G\backslash N)\cup\{e\}\Rightarrow KV\cap N=\{e\}$. 设 $\psi:G\to G/K$ 为商同态, 则 $\psi(V)\cap\psi(N)=\{K\}$. 所以 $\psi(N)$ 为 G/K 的离散子群. 另一方面, 因为 $\psi^{-1}(\psi(N))=KN=K_0$, 所以 $(G/K)/\psi(N)\cong G/\psi^{-1}\psi(N)\cong G/K_0\cong G/\rho^{-1}(K_1)\cong(G/N)/K_1\cong S^a\times F$. 对局部紧交换群 G/K 及其离散子群 $\psi(N)$, 用命题 3.2.4 即可得证. □

以下是紧生成局部紧交换群的结构定理.

定理 3.2.1 紧生成局部紧交换拓扑群必拓扑同构于 $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times K$, 其中 a, b 为非负整数, K 为紧交换群.

证明 由命题 3.2.6, G 有紧子群 H, 使得 $G/H = \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times S^c \times F$, 其中 a, b, c 为非负整数, $S^c \times F$ 为紧交换群. $\rho : G \to G/H$ 为商同态. 取 $K = \rho^{-1}(S^c \times F)$. 对 G 的任一紧子群 E, 有 $E \subset \rho^{-1}(\rho(E)) \subset \rho^{-1}(S^c \times F) = K$. 所以, K 是 G 的极大紧子群. 又有 $G/K \cong \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b$.

设 $\mathscr{L} = \{L | L是G的闭子群, 使得G = LK\}$. 在 $\mathscr{L}$ 内引入偏序如下: 当 $L_1 \supset L_2$ 时, 定义 $L_1 < L_2$. 取 $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 $\mathscr{L}$ 的线性有序子集, 设 $L = \bigcap\limits_{\alpha \in A} L_\alpha$. 对 $x \in G$, $\alpha \in A$, 存在 $y_a \in L_n$, 和 $k_\alpha \in K$, 使 $x = y_\alpha k_\alpha$. 因为 K 是紧集, 故网 $\{k_\alpha | \alpha \in A\}$ 有收敛子网 $\{q_\beta | \beta \in B\}$, 即有函数 $\mu : B \to A$, 使 $q_\beta = K_{\mu(a)}$. 设 $k_\beta = \lim\limits_B q_\beta$. 由 $\alpha \in A$, 可知存在 $\beta \in B$, 使得以下结论成立: 如果 $\beta < r$, 则 $\alpha < \mu(r)$. 这样 $xq_r^{-1} = xk_{\mu(r)}^{-1} = y_{\mu(r)} \in L_{\mu(r)} \subset L_\alpha$, 即 $\lim\limits_B xq_r^{-1} = xk_\beta^{-1}$. 最后, 闭集 L_α 包含 xk_0^{-1}, 所以 $xk_0^{-1} \in L$, 即 $x \in LK$, 也即是 $G = LK$, 故得 $L \in \mathscr{L}$. 现在对 $\mathscr{L}$ 用 Zorn 引理, 可知它有极大元 L_0.

设 $z \in L_0 \cap K$, $z \neq e$. 取不包含 z 的 e 的开邻域 U. G 是紧生成的 $\Rightarrow L_0$ 是 σ-紧的 $\Rightarrow L_0/L_0 \cap K \cong L_0K/K = G/K = \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \Rightarrow L_0/L_0 \cap K$ 是紧生成的 $\Rightarrow L_0$ 是紧生成的 $\Rightarrow L_0$ 有紧子群 H_0, 使得 $H_0 \subset L_0 \cap U$ 及 $L_0/H_0 \cong \mathbb{R}^{a_0} \times \mathbb{Z}^{b_0} \times T_0$, 其中 T_0 为紧群. 以 ρ_0 记商同态 $L_0 \to L_0/H_0$. 设 $K_0 = \rho_0^{-1}(T_0)$, $L_1 = \rho_0^{-1}(\mathbb{R}^{a_0} \times \mathbb{Z}^{b_0})$, 则 $L_1 \subset L_0$, $L_1 \cap K_0 = H_0$, $L_0 = L_1 K_0$. 同样, K_0 为 L_0 的极大紧子群. 于是 $L_1 \cap K_0 = L_1 \cap (L_0 \cap K) \subset L_1 \cap K_0 = H_0 \subset U \Rightarrow z \notin L_1 \cap K \Rightarrow z \notin L_1 \Rightarrow L_1 \neq L_0$. K_0 为紧群 $\Rightarrow K_0 K$ 是 G 的紧子群 $\Rightarrow K_0 K = K$. 于是 $G = L_0 K = L_1 K_0 K = L_1 K \Rightarrow L_1 \in \mathscr{L}$. 但是, 这便有 $L_1 > L_0$, 与 L_0 是 $\mathscr{L}$ 的极大元矛盾, 所以 $L_0 \cap K = \{e\}$. 最后得 $G \cong L_0 \times K \cong \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times K$. □

以下是紧生成群的对偶定理.

命题 3.2.7 如果 G 是紧生成局部紧交换群, 则 G 与 $\hat{\hat{G}}$ 拓扑同构.

证明 由结构定理知 $G = \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times K$, 其中 K 是紧交换群. 已知 $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\hat{\hat{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}$, 由命题 3.1.7, 可得 $\hat{\hat{K}} = K$. 于是 $\hat{\hat{G}} \cong G$. □

3.3 对偶定理

这个对偶定理是说: 如果我们知道一个交换群 G 的全部表示, 即 $\hat{G}$, 则可以从 G 的表示群 $\hat{G}$ 重新得到 G, 就是把 G 表达为 $(\hat{G})^\wedge$.

定理 3.3.1 设 G 是局部紧交换群. 对偶同态 $\delta : G \to \hat{\hat{G}}$ 是拓扑同构.

证明 按前面命题 3.1.5 已知 δ 是连续单同态. 我们将证明

(1) $\delta: G \to \delta(G)$ 是拓扑同构;

(2) $\delta(G) = \hat{\hat{G}}$.

(1) 设 H 是 G 的紧生成开子群. 首先, 证明 $\delta(H) = H^{\perp\perp}$. 对 $x \in H$, 显然 $\delta(x) \in (H^{\perp})^{\perp} \subseteq \hat{\hat{G}}$. 若 $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}_0 \in \hat{G}$, $\mathscr{X}|_H = \mathscr{X}_0|_H$, $f \in (H^{\perp})^{\perp}$, 则 $f(\mathscr{X}) = f(\mathscr{X}_0)$. 由 $\psi \in \hat{H} = \hat{G}/H^{\perp}$, 可知存在 $\mathscr{X} \in \hat{G}$, 使得 $\psi = \mathscr{X}|_H$. 但 $f(\mathscr{X})$ 由 ψ 决定, $\mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}|_H$ 是开映射, 故 $\psi \mapsto f(\mathscr{X})$ 是连续, 所以 $\psi \mapsto f(\mathscr{X})$ 是 $\hat{H}$ 的元素. 据命题 3.2.7, 有对偶同构 $H \to \hat{\hat{H}}$, 所以存在 $x \in H$, 使得 $\delta(x)(\psi) = f(\mathscr{X})$, 即对任意 $\mathscr{X} \in \hat{G}$, $f(\mathscr{X}) = \mathscr{X}(x)$.

其次, 我们证明 $H^{\perp\perp}$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 的开子集. 因为 H 是 G 的开子群, 所以 G/H 是离散群. 于是 $\widehat{G/H} = H^{\perp}$ 是紧群, 即存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $H^{\perp\perp} = U(H^{\perp}, \varepsilon)$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 的单位元开邻域.

最后, 证明 $\delta: G \to \delta(G)$ 是拓扑同构. 据命题 3.2.1, G 有紧生成开子群 H, 并且 H 是 σ-紧, 则按命题 1.3.5, $\delta: H \to H^{\perp\perp}$ 是开映射. 因此, G 有一个单位元的基本开邻域组 $\mathscr{F}$, $U \in \mathscr{F}$. $\delta(U)$ 是 $\delta(G)$ 的开子集.

(2) 先证明: 对 $\hat{G}$ 的任意单位元开邻域 U, 存在 G 的一个紧生成开子群 H, 使得 $H^{\perp} \subset U$.

取 G 的单位元开邻域 V, 使得 $V = V^{-1}$ 且 $\overline{V}$ 为紧集. 以 H_1 记 V 所生成的开子群, 则 H_1 也是闭子群而且可由 $\overline{V}$ 生成. 以 φ 记同构 $\widehat{G/H_1} \to H_1^{\perp}$. 因为 φ 连续且 G/H_1 是离散群, 所以 $\varphi^{-1} \times (U \cap H_1^{\perp})$ 包含 $\widehat{G/H_1}$ 的开邻域 $U(F, \varepsilon)$, 其中 $F = \{x_1 H_1, \cdots, x_m H_m\}$. 以 C 记 F 所生成的 G/H_1 的子群, 则 $C^{\perp} \subset \varphi^{-1}(U \cap H_1^{\perp})$. 取 G 的开子集 W, 使得 $W \supset \overline{V} \cup \{x_1, \cdots, x_m\}$, $\overline{W}$ 是紧集. 以 H 记由 W 所生成 G 的子群, 则 H 为 G 的紧生成开子群. 如果 $\mathscr{X} \in H^{\perp}$, 则 $\mathscr{X} \in H_1^{\perp}$, 且 $\lambda(x_1) = 1$, 即 $\mathscr{X} \in U$.

最后证明: 如果 $f \in \hat{G}$, 则 $f \in \delta(G)$. f 连续, 所以存在 $\hat{G}$ 的单位元开邻域 U, 使得 $\mathscr{X} \in U$. 这样, $|f(\mathscr{X}) - 1| < 1$. 取 G 的紧生成开子群 H, 使得 $H^{\perp} \subset U$. 于是, 对群 $H^{\perp}$ 的所有元 $\mathscr{X}$, 都有 $|f(\mathscr{X}) - 1| < 1$. 这只可能是 $\mathscr{X} \in H^{\perp}$, 即 $f(\mathscr{X}) = 1$, $f \in H^{\perp\perp}$. 由前面 (1) 可知 $H^{\perp\perp} = \delta(H) \subset \delta(G)$. □

3.4 Fourier 变换

本节, 我们将证明 Plancherel 定理及 Fourier 反演公式.

设 G 是局部紧拓扑群, $\hat{G}$ 是 G 的对偶群. 对 $x \in G$, $\hat{x} \in \hat{G}$, 以 $(x, \hat{x})$ 记 $\hat{x}(x)$. 对 $1 \leqslant p < \infty$, $L^p(G)$ 是指由定义在 G 上关于 G 的 Haar 测度 p 次可积函数所生

成的 Banach 空间. 这时, 对 $f \in L^p(G)$,

$$\|f\|_p = \Big(\int_G |f|^p dx\Big)^{1/p}.$$

对 $\hat{G}$ 有同样的记号.

定义 3.4.1　设 $f \in L^1(G)$, $F \in L^1(\hat{G})$. 取

$$B(f,F) = \int_G \int_G f(x)\overline{F(\hat{x})}(x,\hat{x})dxd\hat{x},$$

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int_G f(x)(x,\hat{x})dx, \hat{F}(x) = \int_G F(\hat{x})\overline{(x,\hat{x})}d\hat{x}.$$

我们称 $\hat{f}$ 为 f 的 Fourier 变换, $\hat{F}$ 为 F 的 Fourier 变换.

例 3.4.1　实数 $\mathbb{R}$ 对加法是局部紧拓扑群. 因为 $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, 所以 (x,t) 是 e^{-ixt}. 这时, 对 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 有 Fourier 变换

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}dx.$$

例 3.4.2　设 f 是以 2π 为周期的实变函数. 通过以下公式:

$$f(t) = \widetilde{f}(e^{it}),$$

可得定义在

$$S = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$$

上的函数 $\widetilde{f}$. 因为 $\hat{S}$ 是 $\mathbb{Z}$, 这样便可把 (x,n) 看作 $e^{-inx}(n \in \mathbb{Z})$. 这时, Fourier 变换

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

是 f 的第 n 个 Fourier 系数, f 的 Fourier 级数是

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{-inx}.$$

命题 3.4.1　(1) B 是双线性型.

(2) $B(f,F) = \int_G f(x)\hat{F}dx = \int_G \hat{f}\overline{F(\hat{X})}d\hat{x}$.

(3) $|\hat{f}| \leqslant \|f\|_1$.

(4) $|\hat{F}| \leqslant \|F\|_1$.

(5) $|B(f,F)| \leqslant \|f\|_1\|F\|_1$.

(6) $\widehat{f * h} = \hat{f} \cdot \hat{h}$.

证明 (1) 至 (5) 是显然的. 现证明 (6). 对

$$\widehat{f*h}(\hat{x})=\int\int f(y)h(y^{-1}x)(x,\hat{x})dxdy,$$

作变量代换 $x\mapsto yx$, 便可得证. □

命题 3.4.2 如果 $f\in L^1(G)$, 则 $\hat{f}$ 是 $\hat{G}$ 上连续函数.

证明 设 C 为 G 的紧子集, $f\in L^1(G)$ 满足条件: 若 $x\notin C$, 则 $f(x)=0$. 对 $\varepsilon>0$, 设

$$\hat{V}=\{\hat{y}\in\hat{G}|x\in C\Rightarrow|(x,\hat{y})-1|\leqslant\varepsilon\},$$

则 $\hat{V}$ 是 $\hat{G}$ 的单位元邻域, 而且对 $\hat{y}\in\hat{V}$, 有

$$|\hat{f}(\hat{x}\hat{y})-\hat{f}(\hat{x})|\leqslant\varepsilon\|f\|_1.$$

所以, $\hat{f}$ 是 $\hat{G}$ 上的连续函数. 因为 $C_c(G)$ 是 $L^1(G)$ 的稠密子集 ([Rud 57] Chap 3), 所有 $f\in L^1(G)$ 都是 $C_c(G)$ 中元素序列的极限. 于是, $\hat{f}$ 是连续函数的一致极限, 所以, $\hat{f}$ 是连续. □

定理 3.4.1(Plancherel) 设 G 是局部紧交换群, $\hat{G}$ 是 G 的对偶群, 则可以在 $G,\hat{G}$ 上取适当的 Haar 测度, 使得对 $f\in C_c(G)$, 有

$$\int_G|f(x)|^2dx=\int_{\hat{G}}|\hat{f}(\hat{x})|^2d\hat{x}.$$

我们先来证明以下“归纳”引理. 以 $T(G)$ 记“定理 3.4.1 对群 G 的正确性”.

引理 如果 H 是 G 的开子群, 则由 $T(H)$ 及 $T(G/H)$, 可得 $T(G)$.

证明 设 $\varphi:G\to G/H$ 为商同态. 取 $u=\varphi(x)$, $x\in G$. 因为 $\widehat{G/H}=H^\perp$, 所以可取 $\hat{u}$ 为 $H^\perp$ 的变元. 设 $\psi:\hat{G}\to\hat{G}/H^\perp$ 为商同态, 取 $\hat{y}=\psi(\hat{x})$, $\hat{x}\in\hat{G}$. 因为 $H^\perp=\hat{G}/H^\perp$, 所以可取 y 为 H 的变元. 这样就有 $(y,\hat{u})=1$, $(y,\hat{x})=(y,\hat{y})$ 及 $(x,\hat{u})=(u,\hat{u})$.

取 $k\in C_c(G)$, 则

$$\widetilde{k}(u)=\int_H k(xy)dy\quad(\varphi(x)=u)$$

是 G/H 上的函数. 设

$$\bigwedge(k)=\int_{G/H}du\int_H k(xy)dy,$$

则 $\bigwedge(k_s)=\bigwedge(k)$, 其中 $k_s(x)=k(s^{-1}x)$, $s\in G$. 所以存在常数 C, 使得

$$\bigwedge(k)=c\int_G k(x)dx.$$

我们可以在 G 上取 Haar 测度, 使得 $c=1$, 即有

$$\int_G k(x)dx = \int_{G/H} du \int_H k(xy)dx.$$

同样, 在 $\hat{G}$ 选取适当的 Haar 测度, 即对 $K \in C_c(\hat{G})$, 有

$$\int_{\hat{G}} K(\hat{x})d\hat{x} = \int_{\hat{G}/H^\perp} d\hat{y} \int_{H^\perp} K(\hat{x}\hat{u})d\hat{u} \quad (\psi(\hat{x}) = \hat{y}).$$

以上等式显然对任意的非负连续函数也成立. 于是有

$$\int |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x} = \int d\hat{y} \int |\hat{f}(\hat{x}\hat{u})|^2 d\hat{u}.$$

直接计算,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\hat{x}\hat{u}) &= \int_G f(x)(x, \hat{x}\hat{u})dx \\ &= \int_{G/H} du \int_H f(xy)(xy, \hat{x}\hat{u})dy \\ &= \int_{G/H} \Psi(u, \hat{x})(u, \hat{u})du,\end{aligned}$$

其中

$$\Psi(u, \hat{x}) = \int_H f(xy)(xy, \hat{x})dy = (x, \hat{x})\Phi(x, \hat{y}),$$

$$\Phi(x, \hat{y}) = \int_H f(xy)(y\hat{y})dy.$$

显然, Φ, Ψ 均为连续函数, 而且

$$\Psi(u, \hat{x}\hat{u}) = (u, \hat{u})\Psi(u, \hat{x}),$$

$$\Phi(xy, \hat{y}) = (y, \hat{y})\Phi(x, \hat{y}).$$

因为 $|\Psi|^2 = |\Phi|^2$, 所以可引入函数

$$\Theta(u, \hat{y}) = |\Psi(u, \hat{x})|^2 = |\Phi(x, \hat{y})|^2.$$

由 $T(H)$, 得知

$$\int |f(xy)|^2 dy = \int |\Phi(x\hat{y})|^2 d\hat{y} = \int \Theta(u, \hat{y})d\hat{y}.$$

另一方面, 对任意的 $\hat{x}$, 函数 $u \mapsto \Psi(u, \hat{x})$ 属于 $C_c(G/H)$. 由 $T(G/H)$, 得

$$\int \Theta(u, \hat{y})du = \int |\Psi(u, \hat{x})|^2 du = \int |\hat{f}(\hat{x}\hat{u})|^2 d\hat{u}.$$

于是

$$\int |f(x)|^2 dx = \int du \int |f(xy)|^2 dy = \int du \int \Theta(u, \hat{y}) d\hat{y}.$$

另一方面, 有

$$\int |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x} = \int d\hat{y} \int |f(\hat{x}\hat{u})|^2 d\hat{u} = \int d\hat{y} \int \Theta(u, \hat{y}) du.$$

这便证明了 $T(G)$. □

现在再来证明定理 3.4.1. 我们分四种情形考虑.

1. G 是离散拓扑群. 在 G 上取 Haar 测度使每点的测度是 1. 这时, 由于 $f \in C_c(G)$, 所以 $\hat{f} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mathscr{X}_i$, 其中 $\mathscr{X}_i \in \hat{G}$. 若 $x \neq x_i$, 有 $f(x) = 0, 1 \leqslant i \leqslant n$. 于是, 定理 3.4.1 可由紧群 $\hat{G}$ 的 Schur 正交性定理导出[1)](在 $\hat{G}$ 上取 Haar 测度, 满足条件 $\int_{\hat{G}} dx = 1$).

2. G 是紧群, 取 Haar 测度, 使得 $\int_G dx = 1$. 在 $\hat{G}$ 上取 Haar 测度使每点测度为 1. 这时, 积分 $\int |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x} = \sum_{\hat{x} \in \hat{G}} |\hat{f}(\hat{x})|^2$. 设 $\widetilde{f}(x) = f(x^{-1})$, 则 $\widetilde{f} = \sum_{\hat{x} \in \hat{G}} \hat{f}(\hat{x})\hat{x}$. 所以, 定理 3.4.1 可由紧群 G 的 Peter Weyl 定理得到.

3. G 由单位元的一个紧邻域生成. 这时, 有离散子群 N, 使得 G/N 是紧群. 于是, 利用引理便知定理 3.4.1 对 G 也成立.

4. G 是任意的局部紧交换群. 以 H 记 G 的一个单位元紧邻域所生成的子群, 则 G/H 是离散群, 所以定理 3.4.1 对 G 也成立. □

系理 3.4.1 如果 $f, g \in C_c(G)$, 则

$$\int_G f(x)\overline{g(x)} dx = \int_{\hat{G}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(\hat{x})} d\hat{x}.$$

证明 只需注意等式

$$4f\overline{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2$$

即可. □

系理 3.4.2 如果 $f, g \in C_c(G)$, 则

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}.$$

---

1) 我们将在第 4 章证明 Schur 正交性及 Peter Weyl 定理. 这两个定理的证明均与本章独立, 故亦可放在本章前. 现在的倒序安排是为了便于学习.

证 在系理 3.4.1 中, 把 $g(x)$ 换为 $\overline{g(x)(x,\hat{s})}$, $\overline{\hat{g}(\hat{x})}$ 换为

$$\int_g (g(x))(x,\hat{x}^{-1}\hat{s})dx,$$

就得到本系理. □

下面系理给出 Fourier 反演公式.

系理 3.4.3 设 $f \in C_c(G)$. 如果 $\hat{f} \in L^{-1}(\hat{G})$, 则 $\hat{\hat{f}} = f$.

证明 取 $g \in C_c(G)$, 则

$$\int f\overline{g}dx = \int \hat{f}\hat{g}d\hat{x} = \int \hat{\hat{f}}\overline{g}dx.$$ □

3.5 Poisson 求和公式

设 Γ 是拓扑群 G 的离散子群, $\varphi: G \to G/\Gamma$ 是商映射. 如果 U 是 G 的单位元邻域, 使得

$$U^{-1}U \cap \Gamma = \{e\},$$

则对任意 $x \in G$, $\varphi|_{xU}: xU \to \varphi(xU)$ 是同胚映射.

在局部紧群 G 上取右不变 Haar 测度 dx, 则在 G/Γ 上存在唯一的测度 dx^0. 如果 X 是 G 的可测子集, $X^0 = \varphi(X)$, $\varphi|_x: X \to X^0$ 是单、满映射, 便有

$$\int_X dx = \int_{X^0} dx^0.$$

这时, 对 $f \in C_c(G)$, 以下公式成立:

$$\int_G f(x)dx = \int_{G/\Gamma} \Big(\sum_{r\in\Gamma} f(xr)\Big)dx^0,$$

其中 $x^0 = \varphi(x)$. 事实上, 假如有如上选取的 x 和 U, 则由 $y \in xU$ 可导出 $f(y) = 0$, 于是所求公式是显然的. 由此便可推出一般情形. 不难证明 dx 是右不变测度的充要条件是 dx^0 对于 G 在 G/Γ 上的作用不变. 例如, 当 G/Γ 是紧集时, 有

$$\int_{G/\Gamma} dx^0 < \infty.$$

所以, dx^0 对于 G 在 G/Γ 的作用不变. 于是, 便知 dx 是右不变.

定理 3.5.1 设 Γ 是局部紧交换群的离散子群使得 G/Γ 是紧群. 在 G 上取 Haar 测度, 使得

$$\int_{G/\Gamma} dx^0 < 1.$$

设 $f \in C(G) \cap L^1(G)$($C(G)$表示G上连续函数的集合). 它满足 $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$. 当参数 x, $\hat{x}$ 分别属于 G, $\hat{G}$ 的紧子集时, 级数

$$\sum_{r\in\Gamma} f(x+r) \text{ 和 } \sum_{\hat{r}\in\Gamma^\perp} \hat{f}(\hat{x}+\hat{r})$$

是一致绝对收敛. 则 Poisson 求和公式成立:

$$\sum_{r\in\Gamma} f(r) = \sum_{\hat{r}\in\Gamma^\perp} \hat{f}(\hat{r}).$$

证明 设 $\Phi(x) = \sum_{r\in\Gamma} f(x+r)$. 可把 Φ 看成 G/Γ 上的函数. 因为 $\widehat{G/\Gamma} = \Gamma^\perp$, 所以 Φ 的 Fourier 变换是

$$\hat{r} \mapsto \int_{G/\Gamma} \Big(\sum_{r\in\Gamma} f(x+r)\Big)(x,\hat{r})dx^0 = \hat{f}(\hat{r}).$$

因为 $f \in L^1(\Gamma^\perp)$, 所以用 Fourier 反演公式, 便得

$$\Phi(x) = \sum_{r\in\Gamma} f(x+r) = \sum_{\hat{r}\in\Gamma^\perp} \hat{\Phi}(\hat{r})(-x,\hat{r}).$$

令 $x=0$, 就是所求公式. □

3.6 Tauber 型定理

Tauber 型定理是指这样的定理: 从一个函数 f 的加权平均值的性质得到函数 f 的性质. 这一类定理是由 Hardy-Littlewood 命名的. 在这里所谓加权平均值是可以有不同的形式的, 比如 Fourier 变换、Laplace 变换、卷积 $f*\phi$ 等.

设 G 为局部紧交换群. μ 为 G 的 Haar 测度. 由 G 的全部酉特征标所组成的对偶群记为 $\hat{G}$. 函数 $f: G \to \mathbb{C}$ 的 ess.sup.$|f|$ 是指最小的数 λ 使得 $\mu(\{x : f(x) > \lambda\}) = 0$. 以 $L^\infty(G)$ 记 G 上全部有界 Borel 函数. 若 $f \in L^\infty(G)$, 以 $\|f\|_\infty$ 记 ess.sup.$|f|$. 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 G 内紧集 K 使得对 $x \notin K$ 均有 $|f(x)-a| < \varepsilon$, 则我们便说: 当 $x\to\infty$ 时, 有 $f(x)\to a$, 并记此为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a.$$

(注意: 在 G 里是没有 ∞ 的, 在这里只是个符号而已.) 我们说 $f \in L^\infty(G)$ 是慢振动的, 如果当 $x\to\infty$ 及 $x-y\to 0$ 时, 有 $f(x)-f(y)\to 0$.

本节的目标是证明以下的 Tauber 型定理.

定理 3.6.1　设 G 为局部紧交换群, 并设有慢振动函数 $\phi \in L^\infty(G)$, 及函数 $f \in L^1(G)$ 满足条件: 对任意 $\gamma \in \hat{G}$, Fourier 变换 $\hat{f}(\gamma) \neq 0$. 如果

$$\lim_{x\to\infty} (f * \phi)(x) = a\hat{f}(0),$$

则

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = a.$$

注　当 G 是实数时, 此定理亦见华罗庚的《数论导引》第九章 §4 定理 1(242 页). 当 G 是局部紧群 (不一定交换的) 时, 亦有类似的 Tauber 型定理, 见 [Eym 64]. 除了 Hardy-Littlewood 的工作外, Wiener([Wie 32]) 写过一篇有相当影响的文章, 他的学生池原止戈夫 (Ikehara) 继续他的工作 (见华罗庚的《数论导引》第九章 §4, 定理 2(244 页); 又可参看 [Dle 54]). 在本节最后我们将证明一个池原型的定理. 这个看似实数上的定理也可以应用到拓扑群上 (见黎景辉, 杨杰明 [LY 02]).

3.6.1

Wiener 研究 Tauber 型定理时指出: 设 $f(x)(x \in \mathbb{R})$ 是实变函数, $\hat{f}(u)$ 是 f 的 Fourier 变换, 则 $f(x+\lambda)$ 的 Fourier 变换是 $\hat{f}(u)e^{-iu\lambda}$. 我们可以说函数集合 $\{f(x+\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ 的 Fourier 变换基本上由 $\hat{f}(u)$ 决定 (除因子 $e^{-iu\lambda}$ 外). 这个想法是可以从实数移到拓扑群的.

引理 3.6.1　设 G 是局部紧交换拓扑群, 则 $(L^1(G))^* = L^\infty(G)$.

证明　取 0 的对称紧邻域 V. 设 $V_1 = V$, $V_{n+1} = V_n + V$, 则 $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ 是 G 的 σ-紧开子群. 集 $\{gH : g \in G\}$ 是 G 的分割.

如果 $\phi \in L^\infty(G)$, 定义 $L_\phi \in (L^1(G))^*$ 如下:

$$L_\phi(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx,$$

则 $\phi \mapsto L_\phi$ 便是所需同构 ([HS 71] 定理 (20.20)317, 353 页). □

命题 3.6.1　如果 I 是 $L^1(G)$ 平移不变闭子空间, 则 I 是 $L^1(G)$ 的理想. 如果 I 是 $L^1(G)$ 的闭理想, 则 I 是平移不变的.

证明　对 $\phi \in L^\infty(G)$, $f \in L^1(G)$, 设

$$T_\phi(f) = \int_G f(-y)\phi(y)dy.$$

I 是 $L^1(G)$ 平移不变子空间, 即如果 $f \in I$, 则 $f_x : y \mapsto f(x-y) \in I$. 此时, 如果 $T_\phi(I) = 0$, 即对 $f \in I$ 有 $T_\phi(f) = 0$. 于是对 f 的平移亦有

$$\int_G f(x-y)\phi(y) = 0,$$

即 $f*\phi=0$. 现取 $g\in L^1(G)$, 则

$$\int_G (f*g)(-x)\phi(x)dx=\int_G g(-y)(f*\phi)(y)dy.$$

因为两边都是计算 $(f*g*\phi)(0)$, 此公式告诉我们由 $f*\phi=0$ 得到 $T_\phi(f*g)=0$. 由于 $(L^1(G))^*=L^\infty(G)$, 对 $\bigwedge\in(L^1(G))^*$, 如果 $\bigwedge(I)=0$, 则 $\bigwedge(f*g)=0$. 所以由 Hahn-Banach 定理之推理知 $f*g$ 属于 I 的闭包. 所以我们得证: 如果 I 是 $L^1(G)$ 的平移不变闭子空间, $f\in I$, $g\in L^1(G)$, 则 $f*g\in I$, 即 I 是 $L^1(G)$ 的理想.

反过来, 如果 I 是 $L^1(G)$ 的闭理想, 取 $f\in I, g\in L^1(G)$, 则 $f*g\in I$. 现设 $\phi\in L^\infty(G)$, 并且设 $T_\phi(I)=0$, 则 $T_\phi(f*g)=0$. 由以上计算 $f*g*\phi(0)$ 的公式便得 $T_{f*\phi}(g)=0$ 对所有 $g\in L^1(G)$ 均成立, 所以 $f*\phi=0$, 即

$$T_\phi(f_x)=\int_G f(x-y)\phi(y)dy=f*\phi(x)=0.$$

由 Hahn-Banach 定理得知 $f_x\in I$, 所以得证闭理想必平移不变. □

3.6.2

我们改进前面的 Plancherel 定理. 设有 G 的函数 ϕ, 如果对任意 $x_1,\cdots,x_N\in G$ 及复数 $c_1,\cdots,c_N$ 必有

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n\bar{c}_m\phi(x_n-x_m)\geqslant 0,$$

则称 ϕ 为正定函数. 以 G 上的连续正定函数的有限线性组合所组成的空间记为 $B(G)$.

定理 3.6.2 G 为局部紧交换群. $\hat{G}$ 为它的对偶群

(1) 固定 G 的 Haar 测度, 则可在 $\hat{G}$ 上选取 Haar 测度使得对任意 $f\in L^1(G)\cap B(G)$, 以下反演公式成立:

$$f(x)=\int_{\hat{G}}\hat{f}(\gamma)(x,\gamma)d\gamma,\qquad x\in G.$$

(2) Fourier 变换 $L^1(G)\cap L^2(G)\to L^2(\hat{G}): f\mapsto\hat{f}$ 对 L^2 范数是等距映射. 这个映射可以唯一地扩张为 $L^2(G)\to L^2(\hat{G})$ 的等距双射.

当 $G=\mathbb{R}$ 时这是经典的 Fourier 变换定理 (见 [Rud 87]9.11, 9.13). 读者可以自证, 或可参看 [Rud 67]1.5.1, 1.6.1

3.6.3

G 是局部紧交换拓扑群, $\hat{G}$ 是 G 的对偶群. 以 $\hat{f}$ 记 $f\in L^1(G)$ 的 Fourier 变换. 以 $A(\hat{G})$ 记由 $\hat{f}$, $f\in L^1(G)$ 所组成空间. 本小节证明一些 $A(\hat{G})$ 的性质.

命题 3.6.2 设 C 为 $\hat{G}$ 的紧子集, $V \subset \hat{G}$ 并且 $0 < m(V) < \infty$, 其中 m 为 $\hat{G}$ 的 Haar 测度, 则存在 $k \in L^1(G)$ 使得

(1) 若 $\gamma \in C$, 则 $\hat{k}(\gamma) = 1$; 若 $\gamma \notin C + V - V$, 则 $\hat{k}(\gamma) = 0$, 对所有 $\gamma \in \hat{G}$ 有 $0 \leqslant \hat{k}(\gamma) \leqslant 1$.

(2) $\|k\|_1 \leqslant \sqrt{\dfrac{m(C-V)}{m(V)}}$

证明 (1) 取 $g, h \in L^2(G)$, 使得

$$\hat{g}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \gamma \in V, \\ 0, & \text{若 } \gamma \notin V, \end{cases}$$

及

$$\hat{h}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \gamma \in C - V, \\ 0, & \text{若 } \gamma \notin C - V. \end{cases}$$

设

$$k(x) = \frac{g(x)h(x)}{m(V)}, \quad x \in G,$$

则 $\hat{k} = m(V)^{-1}\hat{g} * \hat{h}$, 于是

$$\hat{k}(\gamma) = \frac{1}{m(V)} \int_V \hat{h}(\gamma - \gamma^1) d\gamma^1, \qquad \gamma \in \hat{G}.$$

若 $\gamma \in C$, $\gamma^1 \in V$, 则 $\hat{h}(\gamma - \gamma^1) = 1$, 于是 $\hat{k}(\gamma) = 1$. 若 $\gamma \notin C + V - V$, 对 $\gamma^1 \in V$, 有 $\hat{h}(\gamma - \gamma^1) = 0$. 由于 $0 \leqslant \hat{h} \leqslant 1$, 由以上积分知 $\hat{k}$ 亦如此.

(2) 按 Plancherel 定理, $\|g\|_2 = \sqrt{m(V)}$, $\|h\|_2 = \sqrt{m(C-V)}$. 按 Cauchy Schwarz 不等式, 有 $\|k\|_1 \leqslant m(V)^{-1}\|g\|_2\|h\|_2$. □

命题 3.6.3 设 W 为 $\hat{G}$ 的开子集, 并有 $\hat{G}$ 的紧子集 $C \subseteq W$, 则存在 $f \in L^1(G)$ 使得在 C 上 $\hat{f} = 1$, 在 W 外 $\hat{f} = 0$

证明 取 $\hat{G}$ 零点的邻域 V, 使得 $C + V - V \subset W$, 则由命题 3.6.2 得本命题.□

命题 3.6.4 设 $f \in L^1(G)$, $\gamma_0 \in \hat{G}$, $\hat{f}(\gamma_0) = 0$, W 是 γ_0 的邻域, $\varepsilon > 0$, 则存在 $k \in L^1(G)$ 使得

(1) $\|k\|_1 < 2$

(2) 存在 γ_0 邻域 U 使得 $\hat{k}$ 在 U 上为 1, 在 W 外为 0.

(3) $\|f * k\|_1 < \varepsilon$

证明 可以假设 $\gamma_0 = 0$. 取

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4(1 + \|f\|_1)}.$$

因为 $f \in L^1(G)$, 故有 G 内紧子集 E 使得

$$\int_{G-E} |f(x)|dx < \delta.$$

现取 $\hat{G}$ 的子集 V 及紧子集 C 使得 1) $C+V-V \subset W$, 2) $|1-(x,\gamma)| < \delta$ 当 $x \in E$, $\gamma \in C+V-V$ 时, 3) $0 < m(V) < \infty$, 4) $m(C-V) < 2m(V)$, 5) 0 点有邻域 $U \subset C$. 按命题 3.6.2 选 k, 如此可立刻证明条件 (1) 和 (2). 余下证 $\|f*k\|_1 < \varepsilon$. 由 $\gamma_0 = 0$ 得 $\hat{f}(0) = 0$, 于是

$$(f*k)(x) = \int_G f(y)(k(x-y) - k(x))dy.$$

所以

$$\|f*k\|_1 \leqslant \int_G |f(y)| \cdot \|k_y - k\|_1 dy = \int_E + \int_{E'}.$$

从 E, C, V 的选取知

$$\int_{E'} < 2\|k\|_1 \delta \leqslant 2\delta \Big(\frac{m(C-V)}{m(V)}\Big)^{\frac{1}{2}} < 4\delta.$$

按命题 3.6.2 之证明, $m(V)k = gh$, 于是

$$m(V)(k_y - k) = g(h_y - h) + (g_y - g)h_y.$$

若 $y \in E$, 则按 Planchcrel 定理得

$$\int_G |g_y - g|^2 = \int_V |1-(y,\gamma)|^2 d\gamma < \delta^2 m(V),$$

即

$$\|g_y - g\|_2 < \delta\sqrt{m(V)}, \qquad y \in E.$$

同样可证 $\|h_y - h\|_2 < \delta\sqrt{m(C-V)}$. 但是 $\|g\|_2 = \sqrt{m(V)}$, $\|h\|_2 = \sqrt{m(C-V)}$, 于是

$$m(V)\|k_y - k\|_1 \leqslant 2\delta(m(V)m(C-V))^{\frac{1}{2}}, \qquad y \in E.$$

因此得 $\|k_y - k\|_1 < 4\delta (y \in E)$, 于是

$$\int_E \leqslant \|f\|_1 \sup_{y\in E} \|k_y - k\|_1 < 4\delta\|f\|_1.$$

所以得证命题的条件 (3) □

命题 3.6.5 设 $f \in L^1(G)$, $\gamma_0 \in \hat{G}$, $\hat{f}(\gamma_0) = 0$, $\varepsilon > 0$, 则存在 $v \in L^1(G)$, γ_0 的邻域 U 使得对 $\gamma \in U$, $\hat{v}(\gamma) = 0$, $\|v\|_1 < 3$, $\|f - f*v\|_1 < \varepsilon$.

证明 $L^1(G)$ 有近似单位 (见 6.1 节). 因此, 有 $u \in L^1(G)$ 使得 $\|u\|_1 = 1$, $\|f - f * u\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 因为 $(\hat{f}\hat{u})(\gamma_0) = 0$. 可用命题 3.6.4 得 γ_0 的邻域 U 及 $k \in L^1(G)$ 使得 $\hat{k}(\gamma) = 1, \gamma \in U$; $\|k\|_1 < 2$ 及 $\|f * u * k\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 现设 $v = u - u * k$, 则在 U 上有 $\hat{v} = 0$, 并且

$$\|f - f * v\|_1 \leqslant \|f - f * u\|_1 + \|f * u * k\|_1 < \varepsilon. \qquad \square$$

命题 3.6.6 设 $f \in L^1(G)$, $\gamma_0 \in \hat{G}$, W 是 γ_0 的邻域, $\varepsilon > 0$, 则存在 $h \in L^1(G)$ 使得 $\|h\|_1 < \varepsilon$, $\hat{h}$ 在 W 外为零和存在 γ_0 的邻域 U, 对 $\gamma \in U$ 有

$$\hat{f}(r) - \hat{h}(\gamma) = \hat{f}(\gamma_0).$$

证明 取 $g \in L^1(G)$ 使得存在 γ_0 的邻域 U_1 及对 $\gamma \in U_1$ 有 $\hat{g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma_0)$. 对 $f - g$ 用命题 3.6.4 得 γ_0 的邻域 U_2 及 $k \in L^1(G)$ 使得在 U_2 上 $\hat{k} = 1$, 在 W 外 $\hat{k} = 0$, $\|(f-g) * k\|_1 < \varepsilon$. 取 $h = (f - g) * k$, $U = U_1 \cap U_2$ 便得命题. $\square$

命题 3.6.7 设 $f \in L^1(G)$, $\varepsilon > 0$, 则存在 $v \in L^1(G)$ 使得 $\hat{v}$ 有紧支集和 $\|f - f * v\|_1 < \varepsilon$.

证明 以 S 记全部的 $g \in L^2(G)$ 使得 $\hat{g}$ 有紧支集. 按 Plancherel 定理, S 的闭包 $= L^2(G)$. 若 $v = gh$, $g, h \in S$, 则 $\hat{v} = \hat{g} * \hat{h}$, 所以 $\hat{v}$ 有紧支集. 这样得知由所有这样的 v 所组成的集合的闭包亦是 $L^2(G)$. 利用近似单位定理, 存在 $u \in L^1(G)$ 使得 $\|f - f * u\|_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 选 $v \in L^1(G)$, $\hat{v}$ 有紧支集, $\|u - v\|_1 < \varepsilon/(2\|f\|_1)$, 则

$$\|f - f * v\|_1 \leqslant \|f - f * u\|_1 + \|f * (u - v)\|_1 < \varepsilon. \qquad \square$$

设 I 为 $A(\hat{G})$ 的理想, ϕ 为 $\hat{G}$ 的函数, $\gamma_0 \in \hat{G}$. 我们说函数 ϕ(局部) 在 γ_0 属于理想 I, 如果存在 γ_0 的邻域 V 及函数 $\hat{f} \in I$ 使得对 $\gamma \in V$ 有 $\phi(\gamma) = \hat{f}(\gamma)$.

命题 3.6.8 如果对 $\hat{G}$ 的任一 γ_0 均有 ϕ 在 γ_0 属于 I, 并且存在紧 $K \subset \hat{G}$ 和函数 $\hat{g} \in I$ 使得对 $\gamma \notin K$ 有 $\phi(\gamma) = \hat{g}(\gamma)$, 则 $\phi \in I$.

证明 (1) 假设 ϕ 有紧支集 C, 则: 1) 按命题假设知存在开集 $V_1, \cdots, V_n$ 及函数 $\hat{f}_1, \cdots, \hat{f}_n \in I$ 使得 $C \subseteq V_1 U \cdots U V_n$ 及对 $\gamma \in V_i$ 有 $\phi(\gamma) = \hat{f}_i(\gamma)$; 2) 可以找到开集 $W_1, \cdots, W_n$ 使得 W_i 的闭包 $\overline{W}_i$ 是紧集和 $\overline{W}_i \subset V_i$, 并且 $C \subset W_1 u \cdots u W_n$; 3) 用命题 3.6.7 得 $\hat{k}_i \in A(\hat{G})$ 使得在 W_i 内有 $\hat{k}_i = 1$, 在 V_i 外有 $\hat{k}_i = 0$.

因为 I 是理想, 于是 $\hat{f}_i\hat{k}_i \in I$, 所以 $\phi\hat{k} = \hat{f}_i\hat{k}_i \in I$. 设 $\mu = 1 - (1 - \hat{k}_1)(1 - \hat{k}_2) \cdots (1 - \hat{k}_n)$ 及 $\psi = \phi\mu$, 则 $\psi \in I$. 在 W_i 上, $\hat{k}_i = 1$, 所以 $\mu = 1$, 于是 $\psi = \phi$. 由于 $C \subset W_1 U \cdots U W_n$, 所以在 C 上 $\psi = \phi$, 在 C 外 $\phi = 0$. 于是处处有 $\phi = \psi \in I$.

(2) 在一般情形下, 由假设知有紧集 $K \subset \hat{G}$ 和 $\hat{g} \in I$ 使得对 $\gamma \in \hat{G} \backslash K$ 有 $\phi(\gamma) = \hat{g}(\gamma)$. 此时 $\phi - \hat{g}$ 有紧支集并且满足命题假设, 于是 $\phi - \hat{g} \in I$, 所以 $\phi \in I$.

3.6.4

若 $f \in L^1(G)$, 则设

$$Z(f) = \{\gamma \in \hat{G} : \hat{f}(\gamma) = 0\}.$$

若 I 为 $L^1(G)$ 的理想, 则设

$$Z(I) = \bigcap_{f \in I} Z(f).$$

命题 3.6.9 设 $f \in L^1(G)$, I 是 $L^1(G)$ 的理想, $\gamma_0 \in \hat{G}$. 如果 $\gamma_0 \notin Z(I)$ 或有 γ_0 的邻域 V 使得对 $\gamma \in V$ 有 $\hat{f}(\gamma) = 0$, 则在 γ_0 函数 $\hat{f}$ 属于 $\hat{I}$.

证明 (1) 假设 $\gamma_0 \notin Z(I)$, 则存在 $g \in I$ 使得 $\hat{g}(\gamma_0) = 1$. 按命题 3.6.6, 存在 $h \in L^1(G)$ 和 γ_0 的邻域 U 满足条件: $\|h\| < \dfrac{1}{2}$, $\hat{h}(\gamma) = 1 - \hat{g}(\gamma)$ 若 $\gamma \in U$.

级数 $\displaystyle\sum_0^\infty \hat{f}\hat{h}^n$ 对 $A(\varGamma)$ 的范数收敛, 即有 $\hat{S} \in A(\varGamma)$ 使得 $\hat{S} = \displaystyle\sum_0^\infty \hat{f}\hat{h}^n$. 这时 $\hat{S} = (1 - \hat{h})^{-1}\hat{f}$, 并取 $\gamma \in U$ 便得 $\hat{g}(\gamma)\hat{S}(\gamma) = \hat{f}(r)$. 因为 $\hat{g} \in \hat{I}$, $\hat{I}$ 为理想, 所以 $\hat{g}\hat{S} \in \hat{I}$, 即在 γ_0 有 $\hat{f}$ 属于 I.

(2) 按假设在 V 上有 $\hat{f} = 0 \in \hat{I}$. □

在这里我们温习点集拓扑的一些定义. 设 X 为拓扑空间. A 为 X 的子集. 定义 A 的内集 (interior) 为

$$A^0 = \bigcup\{U : U \subset A, U\text{为}X\text{的开集}\}.$$

称 A^0 的点为 A 的内点. 我们以 $\bar{A}$ 记 A 的闭包 (closure). 按定义有

$$\bar{A} = \bigcap\{F : F \supset A, F\text{为}X\text{的闭集}\}.$$

我们定义 A 的边界 (boundary) 为

$$\partial A = \bar{A} \cap (X - \bar{A}).$$

设 $x \in X$. 如果 x 的任一邻域 U 内必有 $a \in A$ 使 $a \neq x$, 则称 x 为 A 的闭包点 (closure point) 或聚点 (cluster point). 以 A' 记 A 的所有闭包点所组成的集合, 则 $\bar{A} = A \cup A'$. 如果 $a \in A \backslash A'$, 则称 a 为孤立点 (isolated point). 此时 a 有 X 内邻域 U 使得 $U \cap A$ 为空集. 如果 A 为闭集和 A 没有孤立点, 则称 A 为完全集 (perfect set)(见 [Dug 66]).

命题 3.6.10 设 $f \in L^1(G)$, I 是 $L^1(G)$ 的闭理想, $Z(I) \subset Z(f)$. 以 Q 记全部的 $\gamma \in \hat{G}$ 使得 f 在 γ 不属于 $\hat{I}$, 则 Q 为完全集.

证明 以 R 记全部的 γ 使得 f 在 γ 属于 $\hat{I}$. 由定义知 R 为开集. 因此 Q 为闭集. 余下证明 Q 没有孤立点.

设 γ_0 是 Q 的孤立点. 按命题 3.6.9, 知 $\gamma_0 \in Z(I)$. 由假设, 得 $\hat{f}(\gamma_0) = 0$. 取 γ_0 的紧邻域 W 使得 $W \cap Q$ 为空集. 选取 $k \in L^1(G)$ 使得在 W 外, $\hat{k} = 0$; 在 γ_0 的一个邻域内, $\hat{k} = 1$. 按命题 3.6.5 可得序列 $\{v_n\} \subseteq L^1(G)$ 使得每一 $\hat{v}_n$ 在 γ_0 的某个邻域上等于 0, 而且

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f * v_n\|_1 = 0.$$

考虑函数 $\hat{f}\hat{k}\hat{v}_n$. 由 $\hat{v}_n$ 在 γ_0 的某个邻域为零. 故, 在 γ_0, $\hat{v}_n$ 属于 $\hat{I}$, $\hat{I}$ 为理想, 所以 $\hat{f}\hat{k}\hat{v}_n$ 亦在 γ_0 属于 I. 取 $\gamma \in W$, 由于 $W \cap Q$ 为空集, 知 $\hat{f}$ 在 γ_0 属于 $\hat{I}$, 因此 $\hat{f}\hat{k}\hat{v}_n$ 亦如是. 在 W 外 $\hat{k} = 0$, 同理, 有 $\hat{g} \in \hat{I}$ 使得 $\hat{k}(\gamma) = \hat{g}(\gamma)$ 对 $\gamma \notin W$ 成立. 此时可用命题 3.6.8 得 $\hat{f}\hat{k}\hat{v}_n \in \hat{I}$. 因为 $\hat{I}$ 是闭集, $\hat{f}\hat{k}\hat{v}_n = (f * k * v_n) \to \hat{f}\hat{k}$, 所以 $\hat{f}\hat{k} \in \hat{I}$. 但已知 $\hat{k}$ 在 γ_0 的一个邻域上等于 1, 所以 $\hat{f}$ 在 γ_0 属于 $\hat{I}$. 这就说 $\gamma_0 \notin Q$. 此与 γ_0 的选取相矛盾.

命题 3.6.11 设 $f \in L^1(G)$, I 为 $L^1(G)$ 的闭理想, $Z(I) \subset Z(f)$, $\partial Z(I) \cap \partial Z(f)$ 不含完全集, 则 $f \in I$.

证明 用命题 3.6.7 得 $u_n \in L^1(G)$, $\hat{u}_n$ 有紧支集, $\|f - f * u_n\|_1 \to 0$. 设 $f_n = f * u_n$. 因为 $Z(I) \subset Z(f) \subset Z(f_n)$, 所以

$$Z(I) \cap \partial Z(f_n) \subset Z(I) \cap \partial Z(f) = \partial Z(I) \cap \partial Z(f).$$

由假设知 $Z(I) \cap \partial Z(f_n)$ 不包含完全集. 用命题 3.6.10, 得若 $\gamma_0 \in Z(I) \cap \partial Z(f_n)$, 则 f_n 在 γ_0 属于 $\hat{I}$. 如果 $\gamma_0 \notin Z(I) \cap \partial Z(f_n)$, 则按命题 3.6.9 知 f_n 在 γ_0 属于 $\hat{I}$. 结论是 f_n 在 $\hat{G}$ 每一点都属于 $\hat{I}$. 另一方面, 因为 $\hat{f}_n$ 有紧支集, 所以在一个紧集外, $\hat{f}_n$ 等同 $\hat{I}$ 内的一个元素. 这时由命题 3.6.8 得 $f_n \in I$. 由于 I 是闭集便得 $f \in I$. □

命题 3.6.12 如果 I 是 $L^1(G)$ 的闭理想, $Z(I)$ 是空集, 则 $I = L^1(G)$.

证明 因为 $Z(I)$ 是空集, 所以任意 $f \in L^1(G)$ 及 I 均满足命题 3.6.11 的条件, 因此 $f \in I$. □

命题 3.6.13 设 $\phi \in L^\infty(G)$, $f \in L^1(G)$ 及对任何 $\gamma \in \hat{G}$, $\hat{f}(\gamma) \neq 0$, 并且 $(f * \phi)(x) \to a\hat{f}(0)(x \to \infty)$, 则对每一 $g \in L^1(G)$, 必有

$$\lim_{x\to\infty} (g * \phi)(x) = a\hat{g}(0).$$

证明 我们可以把 ϕ 换作 $\phi - a$, 于是可以假设 $a = 0$. 以 I 记全部 $g \in L^1(G)$ 满足条件: $\lim\limits_{x\to\infty} (g * \phi)(x) = 0$, 则 I 为 $L^1(G)$ 的线性子空间. 显然 I 是平移不变的. 如果 $\|g_n - g_1\|_1 \to 0$, 则 $\|g_n * \phi - g * \phi\|_\infty \to 0$, 故知 I 为闭集. 按命题 3.6.1 知 I 是 $L^1(G)$ 的闭理想. 因为 $f \in I$, 所以 $Z(I)$ 是空集. 按命题 3.6.12 知 $I = L^1(G)$. □

3.6.5

现在我们可以证明定理 3.6.1.

设 $\varepsilon > 0$. 因为 ϕ 是慢振动的, 所以可选 G 内紧集 K. O 点紧邻域 V 使得从 $x-y \in V, x \notin K$ 得 $|\phi(x)-\phi(y)| < \varepsilon$. 设

$$g(x) = \begin{cases} 1/m(V), & \text{若 } x \in V, \\ 0, & \text{若 } x \notin V, \end{cases}$$

其中 m 为 G 的 Haar 测度, 则

$$\phi(x) - (g * \phi)(x) = \frac{1}{m(V)} \int_V (\phi(x) - \phi(x-y))dy.$$

于是, 若 $x \notin K$, 有 $|\phi(x) - (g*\phi)(x)| < \varepsilon$. 按命题 3.6.13, $\lim\limits_{x\to\infty} (g*\phi)(x) = a$. 所求定理便得证.

3.6.6

我们证明一个池原型的定理

定理 3.6.3 设有单调递增正值函数 $A(u)$. 若存在 $\alpha \geqslant 0, \beta > 0, a > 0, T > 0$, 使得

$$\int_0^\infty A(u)e^{-us}du - \frac{a\Gamma(\alpha+1)}{(s-\beta)^{\alpha+1}}$$

在 $\mathrm{Re}(s) \geqslant \beta, |\mathrm{Im}(s)| \leqslant T, s \neq \beta$ 上为连续函数, 则对 $T \gg 0$ 存在常数 $c > 0$ 使得

$$c^{-1} \leqslant \frac{A(u)}{au^\alpha e^{\beta u}} \leqslant c.$$

在以下证明中我们记

$$F(s) = \int_0^\infty A(u)e^{-us}du,$$

$$G(s) = F(s) - \frac{a\Gamma(\alpha+1)}{(s-\beta)^{\alpha+1}},$$

其中 Γ 为 Γ-函数.

证明 把 A, F, G 换为 $A/a, F/a, G/a$. 我们可以假设 $a = 1$.

按假设, 当 $\mathrm{Re}s \geqslant \beta, |\mathrm{Im}s| \leqslant T$ 时,

$$G(s) = F(s) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(s-\beta)^{\alpha+1}}$$

为连续函数, 所以当 $\mathrm{Re}s > 0, |\mathrm{Im}s| \leqslant T$ 时, 有连续函数

$$G(s+\beta) = F(s+\beta) - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},$$

用积分表达,

$$G(\alpha+\beta)=\int_0^\infty A(u)e^{-\alpha(s+\beta)}du-\int_0^\infty u^\alpha e^{-su}du$$
$$=\int_0^\infty (A(u)e^{-\beta u}-u^\alpha)e^{-us}du.$$

引入实值连续函数 k 使得 k 的支集为 $[-1,1]$, k 的 Fourier 变换 $\hat{k}\in L^1(\mathbb{R})$.

对固定 $\sigma>0$, 引入函数

$$H_\sigma(w)=\int_{-\infty}^\infty G(\sigma+\beta+it)k\left(\frac{t}{T}\right)e^{iwt}dt,$$

于是

$$H_\sigma(w)=\int_{-\infty}^\infty\int_0^\infty (A(u)e^{-\beta u}-u^\alpha)e^{-u\sigma}k\left(\frac{t}{T}\right)e^{-i(u-w)t}dudT.$$

以上积分在 $-\infty<t<\infty$, $u>0$ 内任意紧子集上一致绝对收敛, 所以可以交换积分次序, 得

$$H_\sigma(w)=\int_0^\infty (A(u)e^{-\beta u}-u^\alpha)e^{-u\sigma}T\hat{k}(T(u-w))du.$$

设 $|k(t)|\leqslant K$(常数), 便得

$$|H_\sigma(w)-H_{2\sigma}(w)|\leqslant K\int_{-T}^T|G(\sigma+\beta+it)-G(2\sigma+\beta+it)|dT.$$

利用 $G(s+\beta)$ 在 $\operatorname{Re}s\geqslant 0$, $|\operatorname{Im}s|\leqslant T$ 为连续函数, 得 $|G(\sigma+\beta+it)-G(2\sigma+\beta+it)|\to 0$, 当 $\sigma\to 0$ 时.

设 $L(W)=H_{w^{-1}}(W)-H_{2W^{-1}}(W)$, 则由以上讨论得 $\lim\limits_{W\to\infty}L(W)=0$. 引入函数

$$B(u)=A(u)e^{-\beta u},$$
$$Q(u)=\begin{cases}e^{-u}-e^{-2u}, & 若u\geqslant 0,\\ 0, & 若u<0.\end{cases}$$

设 $u=W+y/T$, 得

$$L(W)=\int_{-wT}^\infty B\left(w+\frac{y}{T}\right)Q\left(1+\frac{y}{wT}\right)\hat{k}(y)dy$$
$$-\int_{-wT}^\infty \left(w\left(1+\frac{y}{wT}\right)\right)^\alpha Q\left(1+\frac{y}{wT}\right)\hat{k}(y)dy.$$

取 k 为

$$k(x)=\begin{cases}1-|x|, & 若|x|\leqslant 1,\\ 0, & 若|x|>1,\end{cases}$$

则有 Fourier 变换

$$\hat{k}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}k(x)e^{-ixy}\mathrm{d}x=\left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2.$$

固定实数 μ. 设 w 足够大使得

$$0<\mu<wT \text{ 和 } 1-\frac{\mu}{wT}>\log 2.$$

因为 B,Q 和 $\hat{k}$ 非负, 便得

$$\int_{-wT}^{\infty}B\left(w+\frac{y}{T}\right)Q\left(1+\frac{y}{wT}\right)\hat{k}(y)dy\geqslant\int_{-\mu}^{\mu}B\left(w+\frac{y}{T}\right)Q\left(1+\frac{y}{wT}\right)\hat{k}(y)dy.$$

按假设, 当 $u>0$ 时, $A(u)=B(u)e^u$ 是单调递增的, 所以当 $-\mu\leqslant y\leqslant\mu$ 时, 有

$$B\left(w+\frac{y}{T}\right)\geqslant B\left(w-\frac{\mu}{T}\right)e^{-\frac{2\mu}{T}}.$$

又知 $Q(u)$ 在 $u=\log 2$ 时取极大值, 当 $u>\log 2$ 时, $Q(u)$ 单调递减, 所以当 $-\mu\leqslant y\leqslant\mu$ 时, 便有

$$Q\left(1+\frac{y}{wT}\right)\geqslant Q\left(1+\frac{\mu}{wT}\right).$$

这样得估值

$$\int_{-\mu}^{\mu}B\left(w+\frac{y}{T}\right)Q\left(1+\frac{y}{wT}\right)\hat{k}(y)dy\geqslant e^{-\frac{2\mu}{T}}B\left(w-\frac{\mu}{T}\right)Q\left(1+\frac{\mu}{wT}\right)J(\mu),$$

其中 $J(\mu)=\displaystyle\int_{-\mu}^{\mu}\hat{k}(y)dy\to 2\pi$, 若 $\mu\to\infty$. 代入 $L(w)$ 的算式得

$$\frac{B\left(w-\frac{\mu}{T}\right)}{w^\alpha}\leqslant\frac{e^{2\mu T}}{Q\left(1+\frac{\mu}{wT}\right)J(\mu)}\Big(\frac{L(w)}{w^\alpha}+I\Big),$$

其中

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\left(1+\frac{y}{wT}\right)^\alpha Q\left(1+\frac{y}{wT}\right)\hat{k}(y)dy>0.$$

因为积分在 $\mathbb{R}$ 内紧集上一致绝对收敛, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{w\to\infty}I=&\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{w\to\infty}\left(1+\frac{y}{wT}\right)^\alpha Q\left(1+\frac{y}{wT}\right)\hat{k}(y)dy\\=&Q(1)2\pi(\neq 0).\end{aligned}$$

已知 $\lim_{w\to\infty}\frac{L(w)}{w^\alpha}=0$. 现取常数 C 使得对 w 很大时, 有

$$\frac{B(w-\frac{\mu}{T})}{\left(w-\frac{\mu}{T}\right)^\alpha}\leqslant C\frac{B\left(w-\frac{\mu}{T}\right)}{w^\alpha}$$

(例当 $|\frac{\mu}{T}|<\frac{w}{2}$ 时, 可取 $C=2^\alpha$). 连同以上估值便得

$$\limsup_{u\to\infty}\frac{A(u)}{u^\alpha e^{\beta u}}\leqslant C\limsup_{w\to\infty}\frac{B\left(w-\frac{\mu}{T}\right)}{w^\alpha}\leqslant\frac{C2\pi}{J(\mu)}e^{\frac{2\mu}{T}}.$$

如果取 $\mu=\sqrt{T}$, 则 $\lim_{T\to\infty}\frac{2\pi}{J(\sqrt{T})}e^{\frac{2}{\sqrt{T}}}=1$. 这给出所需的 $\frac{A(u)}{u^\alpha e^{\beta u}}$ 的上界

为了估计下界, 我们现在取 k 如下:

$$k(x)=\begin{cases}1-|x|+\frac{\sin\nu x}{\nu}, & 若|x|\leqslant 1,\\ 0, & 若|x|>1,\end{cases}$$

其中 ν 待定. 取 Fourier 变换

$$\hat{k}(y)=\left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2\frac{\nu^2}{\nu^2-y^2}.$$

因为在 $[-\nu,\nu]$ 上 $\hat{k}(y)>0$, 而在 $(-\infty,-\nu]$ 和 $[\nu,+\infty)$ 内 $\hat{k}(y)$ 取负值, 所以若 $wt\geqslant\nu$ 和 $1-\frac{\nu}{wT}>\log 2$, 则连同 $A(u)$ 和 $Q(u)$ 的单调性, 得

$$\begin{aligned}\int_{-wT}^{\infty}B\Big(w+\frac{y}{T}\Big)Q\Big(1+\frac{y}{wT}\Big)\hat{k}(y)dy&\leqslant\int_{-\nu}^{\nu}B\Big(w+\frac{y}{T}\Big)Q\Big(1+\frac{y}{wT}\Big)\hat{k}(y)dy\\&\leqslant e^{\frac{2\nu}{T}}B\Big(w+\frac{\nu}{T}\Big)Q\Big(1-\frac{\nu}{wT}\Big)I_\nu,\end{aligned}$$

其中 $I_\nu=\int_{-\nu}^{\nu}\hat{k}(y)dy$. 有 $\lim_{\nu\to\infty}I_\nu=2\pi$, 代入 $L(w)$ 的算式便得

$$\frac{B(w+\frac{\nu}{T})}{w^\alpha}\geqslant\frac{e^{-\frac{2\nu}{T}}}{Q\left(1-\frac{\nu}{wT}\right)I_\nu}\Big(\frac{L(w)}{w^\alpha}+J\Big),$$

其中 $J=\int_{-wT}^{\infty}\Big(1+\frac{y}{wT}\Big)^\alpha Q\Big(1+\frac{y}{wT}\Big)\hat{k}(y)dy$. 同样可交换积分与极限得 $\lim_{w\to\infty}J=Q(1)2\pi\neq 0$. 若设 w 足够大, 则有常数 C' 使得

$$\frac{B\left(w+\frac{\nu}{T}\right)}{\left(w+\frac{\nu}{T}\right)^\alpha}\geqslant C'\frac{B\left(w+\frac{\nu}{T}\right)}{w^\alpha}$$

(比如, 若 $w \geqslant \frac{\nu}{T}$, 则 $2w \geqslant w + \frac{\nu}{T}$, 可取 $C' = 2^{-\alpha}$). 这样可得估值

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{A(u)}{u^\alpha e^{\beta u}} \geqslant \liminf_{w\to\infty} \frac{B\left(w+\frac{\nu}{T}\right)}{w^\alpha} \geqslant \frac{C'2\pi}{I_\nu} e^{-\frac{2\nu}{T}}.$$

若取 $\nu(x) = 2\pi \max\{1, \sqrt{x}\}$, 则 $\lim_{x\to\infty} \frac{2\pi}{I_{\nu(x)}} e^{-\frac{2\nu(x)}{x}} = 1$. 于是得下界. □

习　题

以下各题中, 我们总假定 G 是局部紧交换的 Hausdorff 拓扑群.

1. 证明: $L^1(G)$ 对卷积乘法是交换 Banach 代表 ([Rud 87]§18.1).

2. 从 $L^1(G)$ 到 C 的所有非零连续代数同态的全体记为 Δ. $f \in L^1(G)$. 定义 Δ 的函数如下

$$\hat{f}(\delta) = \delta(f), \qquad \delta \in \Delta.$$

设 $\hat{L}^1(G) = \{\hat{f} | f \in L^1(G)\}$. 在 Δ 上取最弱的拓扑, 使得所有 $\hat{f} \in \hat{L}^1(G)$ 是连续函数. 证明: Δ 是局部紧空间 ([Rud 91] §11.9).

3. 在 Δ 上定义的、在无穷远点为零的函数全体记为 $C_0(\Delta)$ ([Rud 57] §3.16). 证明: 若 $f \in L^1(G)$, 则 $\hat{f} \in C_0(\Delta)$. 我们称 $L^1(G) \to C_0(\Delta) : f \mapsto \widetilde{f}$ 为 Gelfand 变换.

4. $L^1(G)$ 的连续线性函数组成对偶空间 $L^\infty(G)$. 证明: $\Delta \subseteq L^\infty(G)$, 且对 $\delta \in \Delta$, 存在函数 a_δ, 使得 $\delta(f) = \int_G f\overline{a}_\delta dx$([Rud 87] §6.15).

5. 设 $\delta \in \Delta$. 选取 $f \in L^1(G)$, 使得 $\hat{f}(\delta) \neq 0$. 定义 $a_\delta(x) = \hat{f}_{x^{-1}}(\delta)/\hat{f}(\delta)$, 其中 $x \in G$. $f_x(s) = f(x^{-1}s)$. 证明 a_δ 是 G 的特征标.

6. 证明: $\Delta \to \hat{G}$, $\delta \mapsto a_\delta$ 是同构, 并且

$$\hat{f}(\delta) = \int_G f(x)\overline{a}_\delta(x)dx.$$

7. 对 $f \in L^1(G)$, $\mathscr{X} \in \hat{G}$, 定义

$$\hat{f}(\mathscr{X}) = \int_G f(x)\overline{\mathscr{X}}(x)dx.$$

证明:

(1) $L^1(G) \to C_0(\hat{G})$, $f \mapsto \hat{f}$ 是连续线性映射;

(2) $\hat{L}^1(G) = \{\hat{f} | f \in L^1(G)\}$ 是 $C_0(\hat{G})$ 的稠密子集.

8. 证明: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$ 不是 L^1 收敛, 所以 $\hat{L}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \neq C_0(\mathbb{Z})$.

9. 已给 G 的函数 ϕ, 如果对任意 $x_1, \cdots, x_N \in G, c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{C}$, 不等式

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n \bar{c}_m \phi(x_n x_m^{-1}) \geqslant 0$$

成立, 则 ϕ 称为正定函数. 证明 G 上的连续函数 ϕ 是正定的充要条件是 $\hat{G}$ 上存在非负有界测度 μ_ϕ, 使得

$$\phi(x) = \int_{\hat{G}} (x, \mathscr{X}) d\mu_\phi(\mathscr{X})$$

([Rud 91] §1.4.3).

10. 以 P 记由 G 上的连续正定函数所生成的线性空间.

(1) 证明: 如果 $f, g \in P \cap L^1(G)$, 则

$$\hat{g} d\mu_f = \hat{f} d\mu_g.$$

(2) 设 $\psi \in C_c(\hat{G})$, 它的支集是 K. 取 $g \in P \cap L^1(G)$, 使得 $\hat{g}$ 在 K 上是正的. 证明:

(i) $T\psi = \int_{\hat{G}} \frac{\psi}{\hat{g}} d\mu_g$ 与 g 的选取无关;

(ii) $T: \psi \to T\psi$ 是线性的;

(iii) 若 $\psi \geqslant 0$, 则 $T\psi \geqslant 0$;

(iv) 若 $\psi_{r_0}(r) = \psi(r_0^{-1} r)$, 则 $T\psi_{r_0} = T\psi$;

(v) $\hat{G}$ 上存在 Haar 测度 $d\mathscr{X}$, 使得

$$T\psi = \int_{\hat{G}} \psi(\mathscr{X}) d\mathscr{X}.$$

(3) 证明: 如果 $f \in P \cap L^1(G)$, 则 $\hat{f} d\mathscr{X} = d\mu_f$, 即

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\mathscr{X})(x, \mathscr{X}) d\mathscr{X}.$$

(4) 取 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. 设 $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, $g = f * f^*$, 则 $g \in P \cap L^1(G)$. 证明: $\|f\|_2^2 = g(0) = \|\hat{f}\|_2^2$.

(5) 设 V 是 G 的单位元邻域, W 是单位元的紧邻域, 使得 $WW^{-1} \subset V$. $|W|$ 是 W 的测度. 令 $f(x) = |W|^{1/2}$. 若 $x \in W$, $f(x) = 0$; 若 $x \notin W$, $g = f * f^*$, 则 $g \in P \cap L^1(G)$. 由 (3), 得

$$\int_{\hat{G}} \hat{g}(\mathscr{X}) d\mathscr{X} = g(0) = 1.$$

取 $\hat{G}$ 的紧子集 K, 使得 $\int_K \hat{g}(\mathscr{X})d\mathscr{X} > \dfrac{2}{3}$, 证明

(i) $\operatorname{supp} g \subseteq WW^{-1}$.

(ii) 如果 x 满足条件: 由 $\mathscr{X} \in K$, 可得 $|1-(x,\mathscr{X})| < \dfrac{1}{3}$, 则 $g(x) > 0$.

现设 $x_0 \neq e$, 取单位元邻域 V, 使得 $x_0 \notin V$, 则存在 $K \subset \hat{G}$, 使得只要 $\mathscr{X} \in K$, 就有 $|1-(x_0,\mathscr{X})| \geqslant \dfrac{1}{3}$. 所以, 存在 $\mathscr{X}_0 \in \hat{G}$, 使得 $\mathscr{X}_0(x_0) \neq 1$.

11. 对 $x \in G$, $\mathscr{X} \in \hat{G}$, 设 $\delta(x)(\mathscr{X}) = \mathscr{X}(x)$. 在 $\hat{G}$ 中取紧子集 K. 对 $\varepsilon > 0$, 设

$$V = \{x \in G \,|\, |1-(x,\mathscr{X})| < \varepsilon, \forall \mathscr{X} \in K\},$$

$$W = \{\hat{\mathscr{X}} \in \hat{\hat{G}} \,|\, |1-(\mathscr{X},\hat{\mathscr{X}})| < \varepsilon, \forall \mathscr{X} \in K\}.$$

(1) 证明 $\delta(V) = W \cap \delta(G)$. 于是, $\delta: G \to \delta(G)$ 是同胚映射, 而且 $\hat{\hat{G}}$ 在 $\delta(G)$ 上诱导的拓扑使 $\delta(G)$ 是紧空间;

(2) 证明 $\delta(G)$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 的闭子集;

(3) 证明 $\delta(G)$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 的稠密子集 (否则, 存在 $F \in \hat{L}^1(G)$, $F \neq 0$, 使得 $F|_{\delta(G)} = 0$. 取 $\phi \in L^1(\hat{G})$, 使得

$$F(\hat{\mathscr{X}}) = \int_{\hat{G}} \phi(\mathscr{X})(-\mathscr{X},\hat{\mathscr{X}})dx.$$

由于 $\phi = 0$, 所以 $F = 0$. 矛盾);

(4) 证明 G 与 $\hat{\hat{G}}$ 同构.

第 4 章　紧群的表示

本章讲紧群的表示. 我们在 4.1 节从一般拓扑群的表示的定义说起, 一般拓扑群的表示空间是无穷维的, 所以难免使用线性拓扑空间 (可看 [XY 86], [Tre 67]). 当然常常只需要用 Hilbert 空间 ([ZL 08] 第一章第 6 节). 本章的中心是 4.2 节 —— 紧群的表示, 这一节最重要的定理是 Peter Weyl 定理. 4.3 节谈的对偶定理的意义和第 3 章的对偶定理一样: 怎样从一个群 G 的表示再构造 G, 在没有交换的条件下就需要新的想法了. 为了给大家一些拓扑群的实例. 我们在 4.4 节谈矩阵群: 特殊正交群 $SO(2)$ 和 $SO(3)$. 从这些例子我们看到一些实际的函数计算.

4.1 群 表 示

设 E 是局部凸线性拓扑空间 ([XY 86] 第二章), 以 $\mathscr{L}(E)$ 记从 E 到 E 的连续线性算子的全体. G 是局部紧 Hausdorff 群.

4.1.1 表示的定义和例子

定义 4.1.1　拓扑群 G 在空间 E 的表示是一个映射 $\pi : G \to \mathscr{L}(E)$, 它满足以下条件:

(1) $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$;

(2) $\pi(e)$ 是 E 的恒等算子;

(3) $G \times E \to E : (x, v) \mapsto \pi(x)v$ 是连续映射.

设 H 是一个 Hilbert 空间 ([ZL 08] 第一章第 6 节), $T : H \to H$ 是 H 上的有界算子, 并且存在有界算子 $S : H \to H$, 使得 $ST = TS =$ 恒等算子. 记所有上述算子 T 的全体为 $\mathrm{Aut}(H)$. 按算子通常的乘法, $\mathrm{Aut}(H)$ 是一个群.

命题 4.1.1　设 H 为复 Hilbert 空间. 如果 (抽象) 群同态 $\pi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ 满足条件: (1) π 是强连续 (即对任意 $v \in H$, 映射 $G \to H$, $x \mapsto \pi(x)v$ 在 $x = e$ 点连续); (2) 存在 e 的邻域 U 及常数 C, 使得 $x \in U \Rightarrow \|\pi(x)\| \leqslant C$, 则 π 是 G 在 H 上的表示.

证明 只需要对 $x, x_0 \in G$, $v, v_0 \in H$ 考虑以下不等式:

$$\begin{aligned}|\pi(x)v - \pi(x_0)v_0| &\leqslant \|\pi(x_0)\| \left|\pi\left(x_0^{-1}x\right)v - v_0\right| \\ &\leqslant \|\pi(x_0)\| \left\{\left|\pi\left(x_0^{-1}x\right)(v - v_0)\right| + \left|\pi\left(x_0^{-1}x\right)v_0 - v_0\right|\right\} \\ &\leqslant \|\pi(x_0)\| \left\|\pi\left(x_0^{-1}x\right)\right\| |v - v_0| + \|\pi(x_0)\| \left|\pi\left(x_0^{-1}x\right)v_0 - v_0\right|. \quad \square\end{aligned}$$

定义 4.1.2 G 的酉表示 (unitary representation) 是指 G 在 Hilbert 空间的表示 π, 使得对任意 $x \in G$, $\pi(x)$ 是 H 的酉算子.

例 4.1.1 取特征 $\chi \in \hat{\mathbb{R}}$, 则 $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} : (x, z) \mapsto \chi(x)z$ 是实数 $\mathbb{R}$ 的加法群的一维酉表示.

例 4.1.2 以 $M_n(\mathbb{C})$ 表示所有 $n \times n$ 复系数矩阵集合. 以下 $\mathrm{T_r}$ 记矩阵 X 的迹. 对内积 $(X, Y) = \mathrm{T_r}(X\overline{Y}^t)$, $M_n(\mathbb{C})$ 是有限维 Hilbert 空间. 若 $U(n)$ 是酉群, 则

$$\pi : U(n) \times M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) \colon (x, X) \mapsto xXx^{-1}$$

是酉表示. 事实上, 有 $x \in U(n) \Rightarrow x^{-1} = \overline{x}^t$, 于是

$$\begin{aligned}(\pi(x)X, Y) &= \mathrm{T_r}\left(xXx^{-1}\overline{Y}^t\right) = \mathrm{T_r}\left(x\left(X\left(\overline{x^{-1}Yx}\right)^t\right)x^{-1}\right) \\ &= \mathrm{T_r}\left(X\left(\overline{\pi\left(x^{-1}\right)Y}\right)^t\right) = \left(X, \pi\left(x^{-1}\right)Y\right).\end{aligned}$$

所以 $\pi\left(x^{-1}\right) = \pi(x)^*$.

例 4.1.3 n 个实变量的 N 次单项式在复数域 $\mathbb{C}$ 上所生成的向量空间 H 对内积

$$(P, Q) = \int_{S^{n-1}} P(x)\overline{Q(x)}dx$$

(其中, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \big| |x| = 1\}$) 是有限维 Hilbert 空间. $SO(n)$ 为正交群, 则

$$\pi(x)P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\left(x^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right), \qquad x \in SO(n)$$

定义一个 $SO(n)$ 在 H 的酉表示.

例 4.1.4 记对 G 的 (左不变)Haar 测度 2 次可积的复值可测函数组成的 Hilbert 空间为 $L^2(G)$. 它的内积为

$$(f, g) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx.$$

取 $\lambda(x)f(y) = f\left(x^{-1}y\right)$, 计算

$$(\lambda(x)f, g) = \int_G f\left(x^{-1}y\right) g(y)dy = \int_G f(y)g(xy)dy = \left(f, \lambda\left(x^{-1}\right) g\right).$$

因此 $\|\lambda(x)f\|_2 = \|f\|_2$, 并且 $\lambda(x)^{-1} = \lambda(x)^*$. 我们来证明映射 $G \to L^2(G)$, $x \mapsto \lambda(x)f$ $(f \in L^2(G))$ 在单位元 e 处连续. 设 $\varepsilon > 0$, 由于 $C_c(G)$ 在 $L^2(G)$ 中稠密, 所以存在 $g \in C_c(G)$, 使得 $\|f - g\|_2 < \varepsilon/3$. $\lambda(x)$ 是 $L^2(G)$ 上的酉算子, 所以 $\|\lambda(x)f - \lambda(x)g\|_2 < \varepsilon/3$. 固定一个 e 的紧邻域 U. 设 g 的支集为 K, 因为 g 是一致连续, 所以 G 有单位元邻域 N, 使得 $N = N^{-1}$, $N \subset U$ 及 $x \in N \Rightarrow \sup|\lambda(x)g - g| < \varepsilon/3\sqrt{m}$, 其中 $m = \int_{UK} dx$. 这时, 对 $x \in N$, 有

$$\|\lambda(x) - g\|_2 < \varepsilon/3.$$

于是, 对 $\varepsilon > 0$, 存在单位元邻域 N, 使得对 $x \in N$, 有

$$\|\lambda(x)f - f\|_2 \leqslant \|\lambda(x)f - \lambda(x)g\|_2 + \|\lambda(x)g - g\|_2 + \|f - g\|_2 < \varepsilon.$$

这就证明了强连续性. 又显然有 $\lambda(xy) = \lambda(x)\lambda(y)$, $\lambda(e)$ 是恒等算子. 故得结论:

$G \times L^2(G) \to L^2(G)$, $(x, f) \mapsto \lambda(x)f$ 是 G 在 $L^2(G)$ 的酉表示, 我们称 λ 为 G 的左正则表示.

例 4.1.5 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R})$ 的内积是

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

对 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 取 $\rho(x)f(y) = f(x + y)$, 则

$$\mathbb{R} \times L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \quad (x, f) \mapsto \rho(x)f,$$

是 $\mathbb{R}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 的酉表示.

例 4.1.6 对 $x \in SL(2, \mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 取

$$\pi(x)f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = f\left(x^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right),$$

则 $SL(2, \mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$, $(x, f) \mapsto \pi(x)f$ 是酉表示.

4.1.2 诱导表示

在局部紧群 G 上取左不变 Haar 测度 dx. 对 $s \in G$, 有

$$\int_G f(sx)dx = \int_G f(x)dx, \text{ 即 } d(sx) = dx.$$

以 Δ_G 记 G 的模函数, 则对 $s \in G$, 有

$$\int_G f\left(xs^{-1}\right) dx = \Delta_G(s) \int_G f(x)dx, \text{ 即 } d(xs) = \Delta_G(s)dx.$$

设 H 是 G 的闭子群, Δ_H 为 H 对左不变 Haar 测度的模函数. x 在商同态 $G \to G/H$ 之下的像记为 x^0. 模函数在 G/H 上决定一个对左平移的拟不变测度 dx^0, 即存在 G 上的正连续函数 δ, 使得

$$\begin{aligned}
&\int_{G/H} dx^0 \int_H f(xy)dy = \int_G f(x)\delta(x)dx,\\
&d(sx)^0 = \frac{\delta(sx)}{\delta(x)}dx^0, \quad \forall s \in G,\\
&\delta(xy) = \delta(x)\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}, \quad \forall x \in G,\ y \in H.
\end{aligned}$$

现在给定一个局部凸空间 V, f 是 $G \to V$ 的函数. 如果 $\overline{\operatorname{supp}(f)^0}$ 是 G/H 的紧集, 我们说 f 有 mod$H$ 紧支集. 以 $C_c(G,H,V)$ 记有 mod$H$ 紧支集的 V 值连续函数全体.

设 τ 是 H 在局部凸空间 V 的表示. 定义

$$\mathscr{C}^\tau = \left\{ f \in C_c(G,H,V) \middle| f(xy) = \left(\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}\right)^{1/2} \tau\left(y^{-1}\right) f(x), \forall y \in H \right\}.$$

设 K 是 G 的紧子集. 定义

$$\mathscr{C}_K^\tau = \left\{ f \in \mathscr{C}^\tau | \operatorname{supp} \subseteq KH \right\}.$$

在 $\mathscr{C}_K^\tau$ 上取范数

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

则 $\mathscr{C}^\tau$ 是 $\mathscr{C}_K^\tau$ 的正向极限. 在 $\mathscr{C}^\tau$ 上取正向极限拓扑. 以 λ 记 G 在 $\mathscr{C}^\tau$ 上的左平移, 即

$$\lambda(s)f(x) = f\left(s^{-1}x\right),$$

则 $G \times \mathscr{C}^\tau \to \mathscr{C}^\tau : (s,f) \mapsto \lambda(s)f$ 是 G 在局部凸空间的表示.

定义 4.1.3 我们说 G 的表示 (π, E) 是从 H 的表示 (τ, V) 到 G 的诱导表示, 如果存在连续线性映射 $T : \mathscr{C}^\tau \to E$, 使得

(1) T 是单映射, $T(\mathscr{C}^\tau)$ 是 E 的稠密子集;

(2) 对任意 $x \in G$, 有 $\pi(x)T = T\lambda(x)$.

例 4.1.7 设 (τ, V) 是 H 在 Hilbert 空间 V 的酉表示. 在 G/H 上取拟不变测度 dx^0 及函数 δ 如上. 对 $f \in \mathscr{C}^\tau$, $x \in G$, $y \in H$, 有

$$\|f(xy)\|^2\delta(xy)^{-1} = \|f(x)\|^2\delta(x).$$

因此, $\|f\|^2\delta^{-1} \in C_c(G/H)$. 定义

$$\|f\|_\tau^2 = \int_{G/H} \|f(x)\|^2\delta(x)^{-1}dx^0.$$

以 $\mathscr{H}^\tau$ 记 $(\mathscr{C}^\tau, \|\|_\tau)$ 的完备化, 则 $\mathscr{H}^\tau$ 是 Hilbert 空间, 并有内积

$$\langle f, g\rangle = \int_{G/H} \langle f(x), g(x)\rangle\delta(x)^{-1}dx^0.$$

事实上,

$$\mathscr{H}^\tau = \Big\{G \xrightarrow{f} V \Big|$$

(i) f 可测,

(ii) 对所有的 $y \in H$ 和几乎所有的 $x \in G$, f 满足

$$f(xy) = \left(\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(x)}\right)^{1/2} \tau(y)^{-1}f(x),$$

(iii) $\displaystyle\int_{G/H} \|f(x)\|^2\delta(x)^{-1}dx^0 < \infty\Big\}$.

G 在 $\mathscr{H}^\tau$ 上的左正则表示是酉表示: 对 $f \in \mathscr{H}^\tau$, 有

$$\|\lambda(s)f\|_\tau^2 = \int_{G/H} \left\|f\left(s^{-1}x\right)\right\|^2 \delta(x)^{-1}dx^0 = \int_{G/H} \|f(x)\|^2\delta(sx)^{-1}d(sx)^0 = \|f\|_\tau^2.$$

常以 $\mathrm{ind}_H^G\tau$ 记 $(\lambda, \mathscr{H})$.

例 4.1.8 设 $G = SL(2, \mathbb{R})$, $K = SO(2)$, 及

$$B = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \in G\right\}.$$

则 $G = KB$. 对 $z \in \mathbb{C}$, 定义 $\mu_z : B \to \mathbb{C}$ 如下:

$$\mu_z\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\right) = a^z.$$

则 μ_z 可看为 B 的一维表示. 考虑 G 在空间

$$\mathscr{H}^z = \Big\{G \xrightarrow{f} \mathbb{C} \Big|$$

(i) f 连续,

(ii) 对 $x \in G$, f 满足等式

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} x\right) = a^{-(z+1)} f(x),$$

(iii) $\|f\|_K^2 = \int_K |f(k)|^2 dk < \infty \Big\}$

对范数 $\|*\|_K$ 的完备化 $\mathscr{H}(z)$ 上的左平移作用 λ, 不难证明 $(\lambda, \mathscr{H}(z))$ 是 G 的诱导表示.

4.1.3 直和

定义 4.1.4 我们说 G 的表示 (π, E) 是表示 (π_i, E_i) 的直和, 记为 $\pi = \bigoplus \pi_i$, $E = \bigoplus E_i$, 如果

(1) E_i 是 E 的闭不变子空间, 使得代数和 $\sum\limits_i E_i$ 是直和而且 $\sum E_i$ 是 E 的稠密子集;

(2) π 在 E_i 上的限制为 π_i.

设 π 是 Hilbert 空间的酉表示. 它称为 π_i 的 Hilbert 直和, 如果

(1) $\pi = \bigoplus \pi_i$;

(2) $i \neq j$, 则 E_i 与 E_j 正交. 这时, 任意 $x \in E$ 可表为

$$x = \sum_i x_i, \quad x_i \in E_i,$$

且有

$$\|x\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2.$$

故最多可数个 x_i 不等于 0.

例 4.1.9 周期为 2π 的二次可积实变函数 f 对范数 $\|*\|_2$ 收敛于它的 Fourier 级数. 令

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

$$\chi_n(x) = e^{inx}.$$

则

$$\lim_{m \to +\infty} \left\| f - \sum_{n=-m}^{m} \hat{f}(n) \chi_n \right\|_2 = 0.$$

我们可以把 f 看成 $S = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上的函数, ρ 为 S 在 $L^2(S)$ 上的右正则表示, 则 $\rho = \bigoplus\limits_{n \in Z} \chi_n$.

定义 4.1.5　已给 G 的酉表示 (π, H), 如果 $v \in H$, 使得由 $\{\pi(x)v|x \in G\}$ 所生成的子空间是 H 的稠密子集, 则 v 称为 π 的循环向量, π 为循环表示.

命题 4.1.2　酉表示是循环表示的直和.

证明　设 (π, H) 是 G 的一个酉表示. 令

$\Gamma = \{\gamma|\gamma = \gamma\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}, H_\alpha$ 是互相正交的闭不变子空间, 且 $\pi|_H$ 是循环表示$\}$. Γ 以包含关系作序. 若 $\Phi \subset \Gamma$, 则 $\widetilde{\gamma} = \bigcup\limits_{\gamma\in\Phi} \gamma$ 是 Φ 的上界. 由 Zorn 引理, Γ 有极大元 $\gamma = \{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 若 $H \neq \bigoplus\limits_a H_\alpha$, 则存在 $0 \neq v \in (\bigoplus H_\alpha)^\perp$. 记由 $\{\pi(x)v|x \subset G\}$ 所生成的闭子空间为 H_0, 则 $\gamma \bigcup H_0 > \gamma$ 这与 γ 的极大性矛盾, 故 $H = \bigoplus\limits_a H_\alpha$.　□

4.1.4　不可约表示

定义 4.1.6　给定 G 的表示 (π, V). 如果 V 的子空间 U 满足条件: $x \in G \Rightarrow \pi(x)U \subseteq U$, 则称 U 为 V 的不变子空间, (π, U) 为 (π, V) 的子表示. 设 V 有不变子空间 U, W, 并且 $W \supset U$, 则可定义表示 $\widetilde{\pi}$ 如下:

$$\pi(x)(w + U) = \pi(x)w + U.$$

我们称 $(\widetilde{\pi}, W/U)$ 为 (π, V) 的子商表示 (subquotient).

如果表示 (π, V) 除了 0 和 V 之外没有其他闭不变子空间, 则 π 称为不可约表示.

如果表示 $\pi = \bigoplus \pi_i, \pi_i$ 是不可约表示, 则我们说 π 是完全可约.

命题 4.1.3(Schur 引理)　拓扑群 G 的酉表示 (π, V) 是不可约的充要条件是

$$\{L \in \mathscr{L}(V)|\forall x \in G, \pi(x)L = L\pi(x)\} = \mathbb{C}.$$

证明　"$\Leftarrow$": π 可约 $\Rightarrow V$ 有闭不变子空间 $U, U \neq 0, U \neq V$. $p: V \to U$ 是正交投影, 则 $p \notin \mathbb{C}$ 且 $p\pi(x) = \pi(x)p$.

"$\Rightarrow$": 设有界算子 L 不是复数而与所有的 $\pi(x)$ 可交换, 则伴随算子 L^* 亦与任意 $\pi(x)$ 可换. 取自伴算子 $A = \frac{1}{2}(L + L^*), B = \frac{1}{2i}(L - L^*)$, 它们也与任意 $\pi(x)$ 交换. $L = A + iB, A, B$ 不会同为复数. 设 A 不是复数,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\lambda$$

是 A 的谱分解, 则 E_λ 与任意 $\pi(x)$ 交换 ([Rud 87], Thm. 12.23). A 不是复数 $\Rightarrow$ 存在 λ_0, 使 E_{λ_0} 也不是复数.　□

命题 4.1.4　有限维酉表示是完全可约的.

证明 设 (π, H) 是 G 的酉表示, $\dim H = n < \infty$. 如果 $n = 1$, 则 π 是不可约. 作归纳假设: 设命题对所有维数小于 n 的酉表示都正确. 在 H 中取最小维数的非零不变子空间 H_1, 作正交分解 $H = H_1 + H_2$. 从公式 $(\pi(x)H_2, H_1) = \left(H_2, \pi\left(x^{-1}\right)H_1\right) = (H_2, H_1) = 0$, 可知 H_2 亦为不变子空间. 对 H_1, H_2 用归纳假设即可.

作为例子, 我们将证明 $SL(2,\mathbb{R})$ 的离散序列 (discrete series) 表示是不可约的. 设

$$G = SU(1,1) = \left\{A \in SL(2,\mathbb{C}) \middle| \overline{A}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

容易得到, $A \in G$, 则

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

令

$$\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}.$$

则 $SL_2(\mathbb{C})$ 中元素可以线性分式变换作用于 $\mathbb{C}$ 上. 不难得到

$$G = \{A \in SL(2,\mathbb{C}) | \mathscr{D}A = \mathscr{D}\}.$$

设

$$T = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{i}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathscr{D}T = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im} z > 0\}.$$

所以 $T^{-1}GT = SL(2,\mathbb{R})$. 设

$$\mu\left(z, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (bz + d)^{-1},$$

则有

$$\mu(z, A')\mu(zA', A) = \mu(z, A'A),$$
$$\frac{d(zA)}{dz} = \mu(z, A)^2.$$

以 $\mathscr{H}$ 记定义在 $\mathscr{D}$ 上的解析函数的全体. 设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G,$$

则 $\left|d^2\right| = |b|^2 + 1 > |b|^2 \geqslant |bz|^2$, 故有 $\mu(z, A) \in \mathscr{H}$.

在 $\mathscr{D}$ 上引进测度

$$dz=\frac{1}{(1-|z|^2)^2}dxdy,\quad z=x+iy,$$

则 dz 是 G 不变测度, 即若 E 是 $\mathscr{D}$ 的 Borel 子集, 则对 $A\in G$, 有

$$\int_{EA}dz=\int_E dz.$$

这是因为

$$\int_{EA}dz=\int_{EA}\frac{1}{(1-|z|^2)^2}dxdy=\int_E\frac{1}{(1-|zA|^2)^2}\left|\frac{dzA}{dz}\right|^2dxdy.$$

设 $z=O\cdot A'$, 则 $1-|z|^2=|\mu(O,A')|^2$. 于是

$$(1-|zA|^2)^{-2}\left|\frac{dzA}{dz}\right|^2=|\mu(O,A'A)|^{-4}|\mu(OA',A)|^4=|\mu(O,A')|^{-4}=(1-|z|^2)^{-2},$$

所以

$$\int_{EA}dz=\int_E dz.$$

对整数 n 引进空间

$$\mathscr{H}_n=\left\{f\in\mathscr{H}\,\middle|\,\int_{\mathscr{D}}|f(z)|^2\frac{dz}{(1-|z|^2)^n}<\infty\right\}.$$

对 $f,g\in\mathscr{H}_n$, 定义

$$(f,g)=\int_{\mathscr{D}}f(z)\overline{g}(z)\frac{dz}{(1-|z|^2)^n}.$$

$\mathscr{H}_n$ 对这个内积的完备化记为 $\mathscr{L}$. 设 $\mathscr{H}_n$ 有序列 $\{f_n\}$ 在 $\mathscr{L}$ 内收敛于 f. 设 $0<r_1<r<r_2<1$, $|z|<r_1$, 则由 Cauchy 公式, 有

$$\begin{aligned}f_n(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f_n\left(re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}-z}ire^{i\theta}d\theta\\&=\frac{1}{2\pi(r_2-r_1)}\int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\frac{f_n\left(re^{i\theta}\right)}{re^{i\theta}-z}e^{i\theta}rdrd\theta\\&=\frac{1}{2\pi(r_2-r_1)}\int_{r_1^2<x^2+y^2<r_2^2}\frac{f_n(x+iy)}{x+iy-z}\times\frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{1/2}}dxdy,\end{aligned}$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{2\pi(r_2-r_1)}\int_{r_1^2<x^2+y^2<r_2^2}\frac{f(x+iy)}{x+iy-z}\times\frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{1/2}}dxdy.$$

故 $f(z)\in\mathscr{H}_n$, 因此 $\mathscr{H}_n$ 是 Hilbert 空间.

对 $f \in \mathscr{H}_n$, $A \in G = SU(1,1)$. 定义

$$(\pi_n(A)f)(z) = \mu(z,A)^{-n} f(zA).$$

则 $\pi_n(A')(\pi_n(A)f) = \pi_n(A'A)f$. 另一方面,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathscr{D}} |(\pi_n(A)f)(z)|^2 \frac{dz}{(1-|z|^2)^n} &= \int_{\mathscr{D}} |\mu(z,A)|^{-2n} |f(zA)|^2 \frac{dz}{(1-|z|^2)^n} \\
&= \int_{\mathscr{D}} \left|\mu\left(zA^{-1},A\right)\right|^{-2n} |f(z)|^2 \frac{d\left(zA^{-1}\right)}{\left(1-|zA^{-1}|^2\right)^n} \\
&= \int_{\mathscr{D}} |f(z)|^2 \frac{dz}{(1-|z|^2)^n}.
\end{aligned}$$

最后一步可这样看: 设 $z = O \cdot A'$. 则

$$\begin{aligned}
\left|\mu\left(zA^{-1},A\right)\right|^{-2n} \frac{d\left(zA^{-1}\right)}{\left(1-|zA^{-1}|^2\right)^n} &= \left|\mu\left(OA'A^{-1},A\right)\right|^{-2n} \left|\mu\left(O,A'A^{-1}\right)\right|^{-2n} dz \\
&= \left|\mu\left(O,A'\right)\right|^{-2n} dz = \left(1-|z|^2\right)^{-n} dz.
\end{aligned}$$

因此, $\pi_n(A)$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的酉算子, 我们称 $(\pi_n, \mathscr{H}_n)$ 为 G 的离散序列表示 (discrete series representation).

引理 4.1.1 (π_n, f_n) 是 $G = SU(1,1)$ 的不可约表示.

证明 对 $f \in \mathscr{H}_n$, $z \in \mathscr{D}$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, $r_1 < r < r_2$, $|z| < r_1$, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi(r_2-r_1)} \int_{r_1^2 < x^2+y^2 < r_2^2} \frac{f(x+iy)}{x+iy-z} \times \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{1/2}} dxdy.$$

所以 $\mathscr{H}_n \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(z)$ 是连续线性函数. 由 Riesz 表示定理可知, 存在 $k_z \in \mathscr{H}_n$, 使得

$$f(z) = (f, k_z).$$

设 $k(z,w) = \overline{k_z(w)}$, 则

$$k(z,w) = \overline{(k_z,k_w)} = (k_w,k_z) = \overline{k(w,z)}, \quad k(z,z) = \overline{(k_z,k_z)} \geqslant 0.$$

由定义可知 $w \to k_z(w) = \overline{k(z,w)}$ 是解析函数, 所以 $z \to k(z,w)$ 也是解析函数. 从 $\pi_n(\mathscr{H}_n) \subseteq \mathscr{H}_n$, 得

$$\begin{aligned}
\mu(w,A)^{-n} k_z(wA) &= (\pi_n(A)k_z)(w) = (\pi_n(A)k_z, k_w) = \left(k_z, \pi_n\left(A^{-1}\right)k_w\right) \\
&= \overline{\left(\pi_n\left(A^{-1}\right)k_w, k_z\right)} = \overline{\mu\left(z,A^{-1}\right)^{-n} k_w\left(zA^{-1}\right)},
\end{aligned}$$

即

$$\mu(w,A)^{-n}\overline{k(z,wA)}=\overline{\mu\left(z,A^{-1}\right)^{-n}}k\left(w,zA^{-1}\right).$$

以 zA 代替 z, 则

$$k(wA,zA)=\mu(w,A)^{n}\overline{\mu\left(zA,A^{-1}\right)^{-n}}k(w,z)=\mu(w,A)^{n}\overline{\mu(z,A)^{n}}k(w,z).$$

由此可知函数 $z\mapsto k(z,z)$ 完全由一点的值决定, 而且 $\mathscr{H}_n=0\Leftrightarrow k(z,z)=0$.

以上关于 k 的讨论我们只用到 $\mathscr{H}_n$ 的两个性质: (1) $\mathscr{H}_n$ 在 G 的作用下不变. (2) $\mathscr{H}_n\to\mathbb{C}$, $f\mapsto f(z)$ 是连续线性函数. 所以, 如果 $\mathscr{H}_n'$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的 G 不变子空间, 同样可得函数 k'. 显然 $k'(z,z)\leqslant k(z,z)$, 因为 k,k' 都由一点的值决定, 所以存在常数 c, 使得 $k'(z,z)=ck(z,z)$, $\forall z\in\mathscr{D}$. 设

$$h(z,w)=k'(z,\overline{w})-ck(z,\overline{w}),$$

则 $h(z,\overline{z})=0$, 并且 $z\mapsto h(z,w)$, $w\mapsto h(z,w)$ 是解析函数. 设 $(z_0,w_0)\in\mathscr{D}\times\mathscr{D}$, 取 $\varepsilon>0$, 使得 $\{(z,w)||z-z_0|\leqslant\varepsilon,\ |w-w_0|\leqslant\varepsilon\}$ 是 $\mathscr{D}\times\mathscr{D}$ 的子集. 对这个集合内的 (z,w), 有

$$\begin{aligned}
h(z,w)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\varepsilon}\frac{h(\xi,w)}{\xi-z}d\xi\\
&=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\xi-z_0|=\varepsilon}d\xi\left\{\int_{|\eta-w_0|=\varepsilon}\frac{h(\xi,\eta)}{(\xi-z)(\eta-w)}d\eta\right\}\\
&=\frac{-1}{4\pi^2}\int_{|\eta-w_0|=\varepsilon}d\xi\int_{|\eta-w|=\varepsilon}d\eta\left\{\frac{h(\xi,\eta)}{(\xi-z_0)(\eta-w_0)}\right.\\
&\qquad\left.\times\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^m\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-w_0}{\eta-w_0}\right)^n\right)\right\}\\
&=\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}z^mw^n.
\end{aligned}$$

所以 h 在每一点 (z,w) 都有幂级数展开, h 是解析函数. 在 $(z_0,\overline{z}_0)$, 有

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}a_{mn}(z-z_0)^m(\overline{z}-\overline{z}_0)^n\equiv 0.$$

设 $z=z_0+re^{i\theta}$, 以 $e^{-il\theta}$ 乘以上式, 然后对 θ 从 0 到 2π 积分, 得到

$$0=\sum_{m-n=l}a_{mn}r^{m+n}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{l+n,n}r^{l+2n}, & l\geqslant 0,\\ \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}a_{m,m-l}r^{2m-l}, & l\leqslant 0.\end{cases}$$

所以对一切 m,n, 有 $a_{mn}=0$, 于是 $h(z,w)\equiv 0$. 故

$$k'(z,w)=ck(z,w).$$

另外, $\mathscr{H}_n'\neq 0\Leftrightarrow c\neq 0$. 设 $\{0\}\neq\mathscr{H}_n'\subsetneq\mathscr{H}_n$. 取 $0\neq f\in\mathscr{H}_n$, f 与 $\mathscr{H}_n'$ 正交, 于是, f 与 k_z' 正交. 这样

$$0=(f,k_z')=c(f,k_z)=cf(z).$$

这与 $f\neq 0$, $c\neq 0$ 矛盾. □

我们还可以问: $\mathscr{H}_n$ 能否为 0? 当 K 是 G 的闭子群时, $(\pi_n|_K,\mathscr{H}_n)$ 是否不可约?

设

$$K=\left\{k_\theta=\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}\in G\right\}.$$

取 $f\in\mathscr{H}_n$, 则对 $h\in\mathscr{H}_n$, 令

$$\alpha(h)=\frac{1}{2\pi}\int_K e^{-im\theta}(\pi_n(k_\theta)f,h)d\theta.$$

它是 $\mathscr{H}_n$ 上的连续线性函数. 据 Riesz 表示定理可得, 有 $\widetilde{f}\in\mathscr{H}_n$, 使得

$$\alpha(h)=(\widetilde{f},h).$$

于是

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(z)&=(\widetilde{f},k_z)=\alpha(k_z)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_K e^{-im\theta}(\pi_n(k_\theta)f)(z)d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_K e^{-i(m+n)\theta}f(zk_\theta)d\theta.\end{aligned}$$

因 f 是 $\mathscr{D}$ 的解析函数, 可设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, 故

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\theta}e^{-i(m+n)\theta}\left(\sum_{l=0}^{\infty}a_lz^le^{2il\theta}\right)d\theta\\&=\begin{cases}0, & \text{若 } m+n \text{ 为奇或 } m+n<0,\\ a_{\frac{m+n}{2}}z^{\frac{m+n}{2}}, & \text{若 } m+n \text{ 为偶且 } m+n\geqslant 0.\end{cases}\end{aligned}$$

所以, 只要 $\mathscr{H}_n\neq\{0\}$, 我们就可取 f, 使得 $f(0)\neq 0$, 即 $a_0\neq 0$, 取 $m=-n$, 立刻可知 $\mathscr{H}_n$ 有非零常数. 因此, $\mathscr{H}_n\neq\{0\}\Leftrightarrow\mathscr{H}_n$ 有非零常数. 但 $\mathscr{H}_n$ 有非零常数的充

要条件是

$$\infty > \int_{|x|<1} \frac{dxdy}{(1-|z|^2)^{n+2}} = 2\pi \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^{n+2}} dr = \pi \int_0^1 \frac{dx}{x^{n+2}}.$$

因此 $\mathscr{H}_n \neq \{0\} \Leftrightarrow n < -1$. 从上面讨论可见, 若选取 $m = 2l - n$ $(l \geqslant 0)$, 则 $\mathscr{H}_n \neq \{0\} \Leftrightarrow \mathscr{H}_n$ 包含所有多项式. 计算内积

$$\begin{aligned}
\left(z^l, z^m\right) &= \int_{|x|<1} z^l \overline{z}^m \left(1-|z|^2\right)^{-n-2} dxdy \\
&= \left(\int_0^{2\pi} e^{i(l-m)\theta} d\theta\right) \left(\int_0^1 \frac{r^{l+m+1}}{\left(1-r^2\right)^{n+2}} dr\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{若 } l \neq m, \\ \alpha_{l,n}, & \text{若 } l = m, \end{cases}
\end{aligned}$$

其中

$$\alpha_{l,n} = \pi \int_0^1 r^l (1-r)^{-(n+2)} dr = \frac{l!(-2-n)!}{(l-1-n)!}\pi.$$

引理 4.1.2　$n < -1 \Rightarrow \left\{ \dfrac{z^l}{\alpha_{ln}} \middle| l \geqslant 0 \right\}$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的正交基.

证明　设 $f \in \mathscr{H}_n$ 在零点的 Taylor 展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

如果 f 与所有的 z^m 正交, 则

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{|x|<1} f(x) \overline{z}^m \frac{dxdy}{(1-|z|^2)^{n+2}} \\
&= \int_0^1 \frac{r^{m+1}}{\left(1-r^2\right)^{n+2}} \left(\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\theta}\right) e^{-im\theta} d\theta\right) dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^{m+1}}{\left(1-r^2\right)^{n+2}} \left(\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \cdot e^{-im\theta} d\theta\right) dr \\
&= 2\pi a_m \int_0^1 r^{2m+1} \left(1-r^2\right)^{n+2} dr.
\end{aligned}$$

因此 $\forall m,\ a_m = 0$, 即 $f \equiv 0$. □

从定义直接计算, 可得

$$\left(\pi_n(k_\theta)\right)\left(z^l\right) = e^{i(2l-n)\theta} z^l.$$

所以, 当把 π_n 限制到子群 K 上时, 有直和分解

$$(\pi_n|_K, \mathscr{H}_n) = \bigoplus_{\substack{m=-n \\ m+n\equiv 0 \pmod 2}}^{\infty} (\pi_n(m), \mathscr{H}_n(m)),$$

其中 $\mathscr{H}_n(m) = \mathbb{C}z^{\frac{m+n}{2}}$, $\pi_n(m)(k_\theta) = e^{im\theta}\cdot 1$. 投射算子 $\mathscr{H}_n \to \mathscr{H}_n(m)$ 由积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}\pi_n(k_\theta)d\theta$$

得出.

4.1.5 逆步表示

设 E, F 为局部凸线性拓扑空间 (见 Schaefer [61]II, §4). 以 $\mathscr{L}(E,F)$ 记从 E 到 F 的连续线性映射的全体. 设 $\mathfrak{S}$ 是 E 的一组子集, $\mathfrak{B}$ 是 F 零点的一个邻域基. 对 $S\in\mathfrak{S}$, $V\in\mathfrak{B}$, 设

$$M(S,V) = \{f\in\mathscr{L}(E,F) | f(S)\subseteq V\}.$$

$\mathscr{L}(E,F)$ 上有唯一的平移不变拓扑, 以

$$\{M(S,V) | S\in\mathfrak{S}, V\in\mathfrak{B}\}$$

为零点的拓扑基. 我们称这个拓扑为 $\mathfrak{S}$-拓扑 (Schaefer [61]III, §3).

例 4.1.10 当 $\mathfrak{S}$ 是 E 全体有限子集时, $\mathfrak{S}$-拓扑便是点态收敛拓扑.

例 4.1.11 当 $\mathfrak{S}$ 是 E 的全部紧子集时, $\mathfrak{S}$-拓扑称为紧收敛拓扑.

例 4.1.12 当 $\mathfrak{S}$ 是 E 的全部凸紧子集时, 称 $\mathscr{L}(E,\mathbb{C}) = E^*$ 的 $\mathfrak{S}$-拓扑为凸紧拓扑. 在 E^* 中 0 点的任一邻域包含这样的子集:

$$M(S,\varepsilon) = \{v^*\in E^* || \langle v, v^*\rangle| \leqslant \varepsilon,\ \forall v\in S\}.$$

对 E 的子集 A, 定义 A 的极为

$$A^o = \{v^*\in E^* || \langle v, v^*\rangle| \leqslant 1,\ \forall v\in A\}$$

(见 [Sch 80], IV, §1.3). 如果 E 是拟完备局部凸空间, 则: (i) E 的准紧子集是相对紧子集 ([Sch 80], I, §5.3); (ii) E 的准紧子集的闭凸包是紧子集 (Schaefer [61], II, §4.3).

给定 G 在局部凸空间 E 的表示 π. 对 $x\in G$, $\pi(x)$ 的共轭算子 $\pi(x)^t$ 由以下等式决定:

$$\langle \pi(x)v, v^*\rangle = \langle v, \pi(x)^t v^*\rangle,$$

其中 $v \in E$, $v^* \in E^*$, 定义

$$\check{\pi}(x) = \pi\left(x^{-1}\right)^t.$$

命题 4.1.5 设 E 是拟完备局部凸空间, (π, E) 是 G 的表示, 在 E^* 上取凸紧拓扑, 则 $(\check{\pi}, E^*)$ 是 G 的表示.

证明 只需证明 $G \times E^* \to E^*$, $(x, v) \mapsto \check{\pi}(x)v$ 是连续映射. 证明分作三步.

(1) 设 K 是 G 的紧子集, 则 $\{\check{\pi}(x)|x \in K\}$ 是 $\mathscr{L}(E^*)$ 的同等连续子集.

同等连续性质即等价于: 对任意的 E^* 的 0 点邻域 V, 存在 E^* 的 0 点邻域 U, 使得 $\check{\pi}(K)(U) \subseteq V$. 由 E^* 的凸紧拓扑的定义, 我们只需要证明: 对 E 的任意凸紧子集 C, 存在 E 的凸紧子集 S, 使得对 $x \in K$, $v^* \in S^o$, 有 $\check{\pi}(x)v^* \subseteq C^o$, 其中 S^o, C^o 分别为 S, C 的极. 事实上, 若取 S 为紧集

$$\left\{\pi\left(x^{-1}\right)v | x \in K,\ x \in C\right\}$$

的凸闭包, 则 E 为拟完备 $\Rightarrow S$ 为紧集. 而且 $v^* \in S^o \Rightarrow \forall u \in S$, $|\langle u, v^*\rangle| \leqslant 1 \Rightarrow \forall x \in K$, $v \in S$, $\left|\left\langle \pi\left(x^{-1}\right)v, v^*\right\rangle\right| = |\langle v, \check{\pi}(x)v^*\rangle| \leqslant 1 \Rightarrow \forall x \in K$, $\check{\pi}(x)v^* \in C^o$.

(2) 对 $v^* \in E^*$, 映射 $G \to E^*$, $x \mapsto \check{\pi}(x)v^*$ 在单位元处连续.

设 K 是 G 的紧子集, 则 $\mathscr{L}(E)$ 的子集 $\left\{\pi\left(x^{-1}\right)|x \in K\right\}$ 同等连续. 由 Ascoli 定理 ([Sch 80]III, §4.5), 在该子集上点态收敛拓扑等于紧收敛拓扑. 即, 当 v 属于 E 的紧子集 C 时, $x \to e \Rightarrow \pi\left(x^{-1}\right)v \to v$ 是一致收敛. 所以, 当 $v \in C$ 时, $\left\langle \pi\left(x^{-1}\right)v, v^*\right\rangle = \left\langle v, \check{\pi}\left(x^{-1}\right)v^*\right\rangle \to \langle v, v^*\rangle$ 是一致收敛. 这就是说, 对 E^* 的凸紧拓扑, $x \mapsto \check{\pi}(x)v^*$ 在单位元 e 连续.

(3) 映射 $G \times E^* \to E^*, (x, v^*) \mapsto \check{\pi}(x)v^*$ 连续.

设 V 是 E 的零点的凸邻域, K 是 G 的单位元的紧邻域, 则由 (1), 存在 0 的邻域 V_1, 使得 $y \in K$, $u^* \in V \Rightarrow \check{\pi}(y)u^* \in V/4$. 取 $x \in G$, $v^* \in E^*$. 设 $w^* \in v^* + V_1$. 由 (2), 存在 x 的邻域 $U \subset xK$, 使得对 $y \in U$, 有 $\check{\pi}(y)w^* - \check{\pi}(x)w^* \in V/4$, 现取 $u^* \in v^* + V_1$, $y \in U$, 则

$$\check{\pi}(y)u^* - \check{\pi}(x)v^* = \check{\pi}(y)(u^* - v^*) + (\check{\pi}(y) - \check{\pi}(x))w^* + (\check{\pi}(y) - \check{\pi}(x))(u^* - w^*) \in V.$$

这就是说, 对已给 $\check{\pi}(x)v^*$ 的邻域 $\check{\pi}(x)v^* + V$, 存在 x 的邻域 U 及 v^* 的邻域 $v^* + V_1$, 使得

$$\check{\pi}(U)(v^* + V_1) \subseteq \check{\pi}(x)v^* + V,$$

即 $G \times E^* \to E^*$ 在 (x, v^*) 是连续的. □

定义 4.1.7 称 $\check{\pi}$ 为 π 的逆步表示 (contragredient represention).

4.1.6 平方可积表示

命题 4.1.6 如果 (π, H) 是局部紧群 G 的不可约酉表示, z 属于 G 的中心, 则 $\pi(z) = \chi(z)I$, $\chi(z) \in \mathbb{C}$, $|\chi(z)| = 1$.

证明 据酉算子 $\pi(z)$ 的谱分解定理, 对单位圆的每一个 Borel 子集 X 有 H 的正交投射 $E(X)$, 使得

$$\pi(z) = \int \lambda dE(\lambda).$$

因为 $\forall x \in G$, $\pi(x)\pi(z) = \pi(z)\pi(x)$, 所以对所有的 $E(X)$, $\pi(x)E(X) = E(X)\pi(x)$. 设 $\mathfrak{N}(X) = \{v \in H | E(X)v = 0\}$, 则 $\pi(x)(E(X)H) \subseteq E(X)H$, $\pi(x)\mathfrak{N}(X) \subseteq \mathfrak{N}(X)$. 所以 $E(X) = 0$ 或 I. 于是 $\pi(z) = \lambda I$, 其中 λ 属于单位圆. □

定义 4.1.8 已给幺模局部紧群 G 的不可约酉表示 (π, H) 及 G 的中心的闭子群 Z, 如果 H 内存在 $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, 使得

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u_0, v_0)|^2 dx < \infty,$$

则称 π 为相对于 Z 的平方可积表示.

命题 4.1.7 如果幺模局部紧群 G 的不可约酉表示 (π, H) 相对于 G 的中心的闭子群 Z 是平方可积, 则对任意 $u, v \in H$, 有

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u, v)|^2 dx < \infty.$$

证明 首先, 固定 $v \neq 0$, 我们来证明, 如果存在 $u_0 \neq 0$, 使得

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u_0, v)|^2 dx < \infty,$$

则对 $\forall u \in H$, 有

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u, v)|^2 dx < \infty.$$

Z 有 (酉) 特征称 χ, 使得对 $z \in Z$, $\pi(z) = \chi(z)I$. 设

$$\mathscr{L} = \left\{ G \xrightarrow{h} \mathbb{C} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{(i) } h \text{ 可测;} \\ \text{(ii) } z \in Z,\ x \in G \Rightarrow h(zx) = \chi(z)h(x); \\ \text{(iii) } \displaystyle\int_{G/Z} |h(x)|^2 dx < \infty \end{array} \right\}.$$

则 Hilbert 空间 $\mathscr{L}$ 的内积是

$$(h_1, h_2) = \int_{G/Z} h_1(x)\overline{h_2(x)} dx.$$

显然 $x \mapsto (\pi(x)u_0, v_0)$ 属于 $\mathscr{L}$. 设

$$H' = \left\{ u \in H \middle| \int_{G/Z} |(\pi(x)u, v)|^2 dx < \infty \right\},$$

则 H' 是 H 的不变子空间; π 不可约 $\Rightarrow H'$ 的闭包等于 H, 即 H' 是 H 的稠密子空间. 用以下公式定义无界算子 $A: H' \to \mathscr{L}$:

$$Au(x) = (\pi(x)u, v).$$

引理 4.1.3 A 是闭算子.

证明 根据定义, 我们需要证明 $\{u' \bigoplus Au' | u' \in H'\}$ 是 $H \bigoplus \mathscr{L}$ 的闭子空间. 取 H' 的序列 u_n, 使得在 H 中有 $u_n \to u$ 及在 $\mathscr{L}$ 中有 $Au_n \to h$. 设 $h_n = Au_n$, 则 $u_n \to u \Rightarrow h_n(x) = (\pi(x)u_n, v) \to (\pi(x)u, v)$. 由此 $h_n \to h \Rightarrow$ 几乎处处有 $h(x) = (\pi(x)u, v)$. 于是

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u, v)|^2 dx = \int_{G/Z} |h(x)|^2 dx < \infty.$$

这说明 $u \in H'$, $h = Au$. □

在 $\mathscr{L}$ 上引入 G 的右平移作用 ρ,

$$(\rho(x)h)(y) = h(yx).$$

则

$$(\rho(x)Au)(y) = Au(yx) = (\pi(y)\pi(x)u, v) = (A(\pi(x)u))(y),$$

即

$$\rho(x)A = A\pi(x).$$

以 $\mathscr{D}(A)$ 记算子 A 的定义域, A^* 为 A 的共轭算子. 如果 $h \in \mathscr{D}(A^*)$, 则 $\forall u \in \mathscr{D}(A)$, 有 $(Au, h) = (u, A^*h) \Rightarrow (A\pi(x)u, h) = (\pi(x)u, A^*h) \Rightarrow \big(Au, \rho\big(x^{-1}\big)h\big) = \big(u, \pi\big(x^{-1}\big)A^*h\big) \Rightarrow h \in \mathscr{D}(A^*)$, 则 $\rho\big(x^{-1}\big)h \in \mathscr{D}(A^*)$, 且 $A^*\rho\big(x^{-1}\big) = \pi\big(x^{-1}\big)A^* \Rightarrow \pi(x)\mathscr{D}(A^*A) \subset \mathscr{D}(A^*A)$ 及 $\pi(x)A^*A = A^*A\pi(x)$. 因为 π 是不可约, 用 Schur 引理便知 $A^*A = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$. 现在考虑 H 中的极限: $u_n \to u$, 其中 $u_n \in \mathscr{D}(A) = H'$. 因为

$$|(Au_m - Au_n, Au_m - Au_n)| = |(A^*A(u_m - u_n), u_m - u_n)| = \lambda \|u_m - u_n\|^2 \to 0,$$

所以 $\{Au_m\}$ 收敛. 设 $Au_n \to h$. 因 A 是闭算子, 所以 $u \in H'$ 且 $Au = h$. 因此, 稠密子集 H' 等于 H.

现在再来证明命题 4.1.7, 由已知存在 u_0, v_0, 使得

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u_0, v_0)|^2 dx < \infty.$$

由上面论证, 可知对任意 u, 有

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u, v_0)|^2 dx < \infty.$$

注意到

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u, v_0)|^2 dx = \int_{G/Z} \left|\pi\left(x^{-1}\right) v_0, u\right|^2 dx = \int_{G/Z} |(\pi(x)v_0, u)|^2 dx < \infty.$$

再利用前面结果可知, 对 $\forall v$ 有

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)v, u)|^2 dx < \infty.$$ □

命题 4.1.8 如果幺模局部紧群 G 的不可约酉表示 (π, H) 相对于 G 的中心的闭子群 Z 是平方可积的, 则存在正实数 d_π(称为 π 的形式次数), 使得对 $u, v \in H$ 有

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u, v)|^2 dx = \frac{1}{d_\pi}\|u\|^2\|v\|^2.$$

证明 前面命题的证明中的闭算子 A 的定义域是整个 H, 所以根据闭图像定理, A 是有界算子. 考虑映射 $u \mapsto Au$, 便知有正常数 c_v, 使得

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u, v))|^2 dx = c_v\|u\|^2.$$

同理, 有 c_u, 使得

$$\int |(\pi(x)u, v))|^2 dx = c_u\|v\|^2.$$

于是 $c_v\|u\|^2 = c_u\|v\|^2$. 取 $d_\pi = \dfrac{1}{c_v}\|v\|^2$ 即可. □

4.1.7 缠结算子

定义 4.1.9 设 (π, E), (π', E') 是拓扑群 G 在局部凸空间上的两个表示. 如果存在同构 $T: E \to E'$, 使得对 $x \in G$, 有 $T\pi(x) = \pi'(x)T$, 则称表示 π 与 π' 等价. 如果 E 和 E' 都是 Hilbert 空间, 则这就是要求 T 和 T' 的逆算子均为有界算子.

设 (π, E) 和 (π', E') 是 G 的酉表示, 且上面的同构 T 是酉算子, 则我们说 π 与 π' 是酉等价.

我们称 T 为 π 与 π' 间的缠结算子 (intertwining operator).

命题 4.1.9 两个等价的酉表示是酉等价的.

证明 因为 $TT^*\pi'(x) = T\pi(x)T^* = \pi'(x)TT^*$, 且 TT^* 是正 Hermite 算子, 所以, 取 $S = \sqrt{TT^*}$, $S^{-1}\pi'(x) = \pi'(x)S^{-1}$, 酉算子 $S^{-1}T$ 便是所需的 π 与 π' 间的缠结算子. □

命题 4.1.10(Schur 正交关系) 设幺模局部紧群 G 有相对于中心的闭子群 Z 平方可积的不可约表示 (π, H) 和 (π', H'), 使得对 $z \in Z$, $\pi(z) = \pi'(z)$. 则有

(1) 如果 π 与 π' 不等价, 则对 $u, v \in H$ 和 $u', v' \in H'$, 有

$$\int_{G/Z} (\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx = 0.$$

(2) 如果酉同构 T 是 π 与 π' 间的缠结算子使 π 与 π' 等价, 则对 $u, v \in H$ 和 $u', v' \in H'$, 有

$$\int_{G/Z} (\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx = \frac{1}{d_n}(Tu, u')(v', Tv),$$

其中 d_n 是 π 的形式次数.

证明 固定 u, u', 对任意 v, 则 H' 上的线性函数

$$v' \to \int_{G/Z} (\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx$$

是连续的, 故可表为 (v', Bv), 其中 $Bv \in H'$. 显然 $H \to H' : v \mapsto Bv$ 是有界线性算子. 注意

$$\begin{aligned}\int_{G/Z} (\pi(x)u, \pi(y)v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx &= \int_{G/Z} \left(\pi\left(y^{-1}x\right)u, v\right)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx \\ &= \int_{G/Z} (\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', \pi'\left(y^{-1}\right)v')}dx,\end{aligned}$$

即有

$$(v', B\pi(y)v) = \left(\pi'\left(y^{-1}\right)v', Bv\right) = (v', \pi'(y)Bv).$$

于是, 得 $B\pi(y) = \pi'(y)B$. 我们需要下列引理.

引理 4.1.4 π, π' 是不可约酉表示, B 为有界算子. $B\pi = \pi'B \Rightarrow B = 0$ 或 $B = \lambda R$, $\lambda \in \mathbb{C}$, R 为等距算子.

证明 连续算子 B^* 也满足 $\pi B^* = B^*\pi'$. Hermite 算子 $B^*B = A$ 满足 $A\pi = \pi A$. 从 Schur 引理 (命题 4.1.3) 可得 $A = \lambda I$. 故得 $B = 0$ 或 λR, R 为等距算子. □

现在回来看命题 4.1.10. 如果 π 与 π' 等价, 必然有 $B = 0$, 就得到 (1).

考虑 (2), 由已知, 得到 $(T^{-1}B)\pi = \pi(T^{-1}B)$, 同样由 Schur 引理, 得到常数 $c_{u,u'}$, 使得

$$B = \bar{c}_{u,u'}T.$$

这样

$$\int_{G/Z}(\pi(x)u,v)\overline{(\pi'(x)u',v')}dx = c_{u,u'}(v',Tv).$$

注意到 $(\pi(x)u,v) = \overline{(\pi(x^{-1})v,u)}$ 及 G 为幺模群, 上式左方等于

$$\int_{G/Z}\overline{(\pi'(x)u',v')\overline{(\pi(x)u,v)}}dx = \int_{G/Z}\overline{(\pi(x)v,u)\overline{(\pi'(x)v',u')}}dx = \bar{c}_{v,v'}(Tu,u').$$

于是

$$c_{u,u'}\overline{(Tv,v')} = \bar{c}_{v,v'}(Tu,u').$$

取 $u=v$, $u'=v'$, 可知有实常数 c, 使得

$$c_{u,u'} = c(Tu,u').$$

于是

$$\int_{G/Z}(\pi(x)u,v)\overline{(\pi'(x)u',v')}dx = c(Tu,u')(v',Tv).$$

取 $u'=Tu$, $v'=Tv$, 及 $u=v$, 则有

$$c(u,u)^2 = \int_{G/Z}|(\pi(x)u,u)|^2dx = \frac{1}{d_\pi}(u,u)^2.$$

因此

$$c = \frac{1}{d_\pi}.$$

□

4.2 紧群的表示

4.2.1 Peter-Weyl 定理

在这节中, 我们假设 G 是紧拓扑群. 在 G 上取 Haar 测度 dx, 使得 $\int_G dx = 1$.

命题 4.2.1 紧群的酉表示是有限维不可约表示的直和.

证明 设 (π,H) 是紧群的酉表示. 可假设 π 是循环表示, $u\in H$ 是循环向量, $\|u\|=1$, 在 H 上引入新的内积

$$\langle v,w\rangle = \int_G(\pi(x)v,u)(u,\pi(x)w)dx.$$

应用 Schwarz 不等式, 得

$$|\langle v, w\rangle| \leqslant \|v\| \cdot \|w\|.$$

因此, 存在有界 Hermite 算子 A, 使得 $\langle v, w\rangle=(Av, w)$,

$$(Av, v)=\int_G |(\pi(x)v, u)|^2 dx \geqslant 0,$$

所以 $A \geqslant 0$. 如果 $(Av, v)=0$, 则对 $x \in G$, 有

$$(\pi(x)v, u)=\left(v, \pi\left(x^{-1}\right) u\right)=0$$

(留意: $x \rightarrow (\pi(x)v, u)$ 是连续的). u 是循环向量, 故此 $v=0$. 设有 $v \neq 0$. 使得 $Av=\lambda v$, 则 $\lambda>0$. 作计算:

$$\begin{aligned}
(A\pi(x)v, w) &= \int_G (\pi(s)\pi(x)v, u)(u, \pi(s)w) ds \\
&= \int_G (\pi(s)v, u)\left(u, \pi\left(sx^{-1}\right) w\right) ds \\
&= \left(Av, \pi\left(x^{-1}\right) w\right)=(\pi(x)Av, w),
\end{aligned}$$

则对 $\forall x \in G$, 有 $A\pi(x)=\pi(x)A$. 设

$$H(\lambda)=\{v \in H | Av=\lambda v\},$$

则对 $x \in G$, 有 $\pi(x)H(\lambda) \subset H(\lambda)$.

现证 A 是紧算子. 设 H 的序列 $\{v_n\}$ 弱收敛于 v. 根据 Banach-Steinhaus 定理, $\{v_n\}$ 有界, 即存在 M, 使得 $\|v_n\| \leqslant M$. 用 Schwarz 不等式, 得

$$\left|(\pi(x)v_n, u)(u, \pi(s)v_n)\left(\pi\left(sx^{-1}\right) u, u\right)\right| \leqslant M^2.$$

故可应用 Lebesgue 有界收敛定理作下列计算:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty}\|Av_n\|^2=\lim_{n \rightarrow \infty}(Av_n, Av_n) \\
=&\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G (\pi(x)v_n, u)(u, \pi(x)Av_n) dx \\
=&\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G \int_G (\pi(x)v_n, u)(u, \pi(s)v_n)\left(\pi(s)\pi\left(x^{-1}\right) u, u\right) dxds \\
=&\int_G \int_G (\pi(x)v, u)(u, \pi(s)v)\left(\pi\left(sx^{-1}\right) u, u\right) dxds=\|Av\|^2.
\end{aligned}$$

另一方面, 由弱收敛定义, 有 $(Av, A(v-v_n)) \rightarrow 0$, 即 $\lim\limits_{n \rightarrow \infty}(Av, Av_n)=\|Av\|^2$. 又因

$$\|Av-Av_n\|^2=\|Av\|^2-(Av, Av_n)-(Av_n, Av)+\|Av_n\|^2,$$

所以 $\lim_{n\to\infty} \|Av - Av_n\| = 0$. 这就证明了 A 是紧算子.

设 R 是正定紧 Hermite 算子 A 的特征根集合, 按紧算子的谱分解定理,

$$H = \bigoplus_{\lambda\in R} H(\lambda), \quad \dim H(\lambda) < \infty.$$

每个 $H(\lambda)$ 是不变子空间. □

注 以上证明过程说明: 若表示 π 与紧算子交换, 则 π 是有限维不可约表示的直和.

系理 4.2.1 紧群的不可约酉表示是有限维的. □

命题 4.2.2 如果 π 是紧群 G 在有限维空间 V 的表示, 则可在 V 上引入内积, 使得 π 是酉表示.

证明 在 V 上任取一个 Hermite 内积 $(\cdot,\cdot)$, 则以下内积满足命题的要求:

$$\langle u, v\rangle = \int_G (\pi(x)u, \pi(x)v)dx.$$ □

系理 4.2.2 紧群的有限维表示是完全可约的.

证明 在表示空间上引入内积, 使得表示成酉表示. □

命题 4.2.3(Schur 引理) 已给紧群 G 的不可约有限维表示 (π, V), (π', V'). 如果线性映射 $T: V \to V'$, 使得对 $x \in G$, 有 $T\pi(x) = \pi'(x)T$, 则 $T = 0$ 或 T 是双射.

证明 显然 T 的核和像集分别是 V 和 V' 的不变子空间. □

系理 4.2.3 与紧群 G 的有限维不可约酉表示 (π, V) 交换的线性映射 $T: V \to V$ 是数乘映射.

证明 设 λ 是 T 的特征根, 则 $T - \lambda I$ 不是单满映射. 由系理 4.2.2, 一定有 $T - \lambda I = 0$, 即 $T = \lambda I$. □

系理 4.2.4(Schur 正交关系)

(1) 设 (π, V) 和 (π', V') 是紧群 G 的互不等价的有限维不可约酉表示, 则对 $u, v \in V$; $u', v' \in V'$, 有

$$\int_G (\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx = 0.$$

(2) 设 (π, V) 是紧群 G 的有限维不可约酉表示, 则对 $u_1, v_1, u_2, v_2 \in V$, 有

$$\int_G (\pi(x)u_1, v_1)\overline{(\pi(x)u_2, v_2)}dx = \frac{(u_1, u_2)\overline{(v_1, v_2)}}{\dim V}.$$

证明 (1) 设 $L: V' \to V$ 为线性映射, 定义

$$T_L = \int_G \pi(x)L\pi'\left(x^{-1}\right)dx : V' \to V,$$

则 $\pi(y)T_L\pi'\left(y^{-1}\right)=T_L$, 即 $\pi(y)T_L=T_L\pi'(y)$, $\forall y\in G$, 于是 $T_L=0$. 设 $L(\omega')=(\omega',\omega')u$, 并利用 $(T_Lv',v)=0$, 便可得到所需等式.

(2) 取线性映射 $L:V\to V$. 定义

$$T_L=\int_G\pi(x)L\pi\left(x^{-1}\right)dx,$$

则类似 (1) 可得结论: $\exists\lambda\in\mathbb{C}$, 使得 $T_L=\lambda I$. 取迹, 得

$$\mathrm{tr}\ T_L=\mathrm{tr}\ L=\lambda\cdot\dim V,$$

故 $\lambda=\mathrm{tr}\ L/\dim V$. 于是

$$(T_Lv_2,v_1)=\frac{\mathrm{tr}\ L}{\dim V}\overline{(v_1,v_2)}.$$

取 $L(\omega)=(\omega,u_2)u_1$, 即可. □

定义 4.2.1 已给 G 的有限维酉表示 (π,V). 称 $\dim V$ 为 π 的次数, 并记为 d_π. 对任意 $u,v\in V$, 称函数 $x\mapsto(\pi(x)u,v)$ 为 π 的矩阵系数. 若 $\{u_i\}$ 为 V 的法正交基, 则称

$$\chi_\pi(x)=\mathrm{tr}\pi(x)=\sum_{i=1}^{d_\pi}(\pi(x)u_i,u_i)$$

为 π 的特征标.

命题 4.2.4 设 π, π' 是 G 的有限维不可约酉表示, 则

(1) $\chi_\pi(x)=\overline{\chi_\pi\left(x^{-1}\right)}$;

(2) $d_\pi\chi_\pi*\chi_\pi=\chi_\pi$;

(3) 如果 π 与 π' 不等价, 则 $\chi_\pi*\chi_{\pi'}=0$.

证明 从 $(\pi(x)u_i,u_j)=\overline{\left(\pi\left(x^{-1}\right)u_j,u_i\right)}$, 得 (1). 计算卷积

$$\chi_\pi*\chi_{\pi'}(y)=\int_G\chi_\pi(x)\chi_{\pi'}\left(x^{-1}y\right)dx=\sum_{i,j}\int_G(\pi(x)u_i,u_i)\overline{(\pi'(x)u_j,\pi'(y)u_j)}dx.$$

利用 Schur 正交关系, 便得 (2) 和 (3).

定理 4.2.1(Peter-Weyl 定理) G 是紧群, 则有

(1) 在 $L^2(G)$ 中, G 的所有有限维不可约酉表示的矩阵系数生成稠密子空间.

(2) 设 $\hat{G}$ 是 G 的最大一组互不等价的有限维不可约酉表示. 在 $\pi\in\hat{G}$ 的表示空间中选定一个法正交基, 相对于这个基 $\pi(x)$ 的矩阵记为 $(\pi_{ij}(x))$ $(1\leqslant i,j\leqslant d_\pi)$. 则 $\{(d_\pi)^{1/2}\pi_{ij}(x)\}$ 是 $L^2(G)$ 的法正交基.

(3) 取 $f\in L^2(G)$, 则 f 的 Fourier 级数展开式

$$f=\sum_{\pi\in\hat{G}}d_\pi\chi_\pi*f,$$

而且 Plancherel 公式

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \sum_{\hat{G}} d_\pi \sum_{ij} \int_G |f(x)\overline{\pi_{ij}(x)}|^2 dx$$

成立.

(4) (π, V) 是 G 的酉表示, τ 是 G 的有限维不可约酉表示. 设 $[\tau,\pi] = \{U|U$ 是 V 的不变子空间, $\pi|_U$ 与 τ 等价$\}$. 以 $V(\tau)$ 记 $\sum\limits_{U\in[\tau,\pi]} U$ 的闭包, 以 $E_\tau : V \to V(\tau)$ 记正交投影, 则

(i) $E_\tau = d_\tau \int_G \pi(x)\overline{\chi}_t(x)dx$;

(ii) 如果 τ 与 τ' 不等价, 则 $E_\tau E_{\tau'} = E_{\tau'} E_\tau = 0$;

(iii) 如果 $v \in V$, 则 $v = \sum\limits_{\tau\in\hat{G}} E_\tau v$.

证明 (1) 如果 $h(x) = (\pi(x)u, v)$ 是 π 的矩阵系数, 则以下函数亦是:

$$\begin{aligned}
\overline{h\left(x^{-1}\right)} &= (\pi(x)v, u), \\
h(sx) &= \left(\pi(x)u, \pi\left(s^{-1}\right)v\right), \\
h(xs) &= (\pi(x)\pi(s)u, v).
\end{aligned}$$

所以由有限维不可约酉表示的矩阵系数所生成的 $L^2(G)$ 的子空间的闭包 U 在左平移、右平移及变换 $h(x) \to \overline{h(x^{-1})}$ 之下不变. 于是 $U \neq L^2(G) \Rightarrow U^\perp \neq 0$.

设 N 是 G 的单位元开邻域. 以 $|N|$ 记 N 的测度, φ_N 记 N 的特征函数. 取 $0 \neq k \in U^\perp$. 用左正则表示定义函数

$$F_N(x) = \frac{1}{|N|}\int_G \varphi_N(y)k\left(y^{-1}x\right)dy.$$

F_N 是两个 L^2 函数的卷积, 所以它是连续的. 当 N 缩至 e 时, F_N 在 L^2 中收敛. 至 $k \neq 0$, 所以存在一个 F_N 不等于 0. 显然 $F_N \in U^\perp$, 所以 $U^\perp$ 有连续非零函数. 在平移并乘以适当的复数后, 可假设 $U^\perp$ 有非零函数 F_1, 使得 $F_1(e)$ 是不等于 0 的实数. 设

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \int_G F_1\left(yxy^{-1}\right)dy, \\
F(x) &= F_2(x) + \overline{F_2\left(x^{-1}\right)}.
\end{aligned}$$

则 F 是连续函数, $F \in U^\perp$, $F(e) = 2F_1(e)$ 是非零实数, $\forall s \in G$, 有 $F_2\left(sxs^{-1}\right) = F_2(x)$.

设 $k(x,y)=F\left(x^{-1}y\right)$. 定义积分算子

$$Tf(x)\int_G k(x,y)f(y)dy,\quad f\in L^2(G).$$

则从 $F\neq 0$ 及

$$k(x,y)=\overline{k(y,x)},$$

$$\int_{G\times G}|k(x,y)|^2dxdy=\int_G|F(x)|^2dx<\infty,$$

可得 $T:L^2(G)\to L^2(G)$, 是非零 Hilbert-Schmidt 算子. 所以 T 有非零实特征根 a, 这个 a 的特征空间 $V_a\subseteq L^2(G)$ 是有限维的, 而且 V_a 是左正则表示 λ 的不变子空间,

$$\begin{aligned}(T\lambda(s)f)(x)&=\int_G F\left(x^{-1}y\right)f\left(s^{-1}y\right)dy=\int_G F\left(x^{-1}sy\right)f(y)dy\\&=(Tf)\left(s^{-1}x\right)=af\left(s^{-1}x\right)=a\lambda(s)f(x).\end{aligned}$$

因为 $\dim V_a<\infty$, 所以 V_a 有不可约不变子空间 $W_a\neq 0$.

在 W_a 中, 取基 $f_1,\cdots,f_n$, 则 λ 在 W_a 中的矩阵系数是

$$h_{ij}(x)=(\lambda(x)f_j,f_i)=\int_G f_j\left(x^{-1}y\right)\overline{f_i(y)}dy.$$

据 U 的定义, $h_{ij}\in U$, 另一方面, 因为 $F\in U^{\perp}$, 所以

$$\begin{aligned}0&=\int_G F(x)\overline{h_{ii}(x)}dx\\&=\int_G\int_G F(x)\overline{f_i\left(x^{-1}y\right)}f_i(y)dydx\\&=\int_G\int_G F\left(yx^{-1}\right)\overline{f_i(x)}f_i(y)dxdy\\&=\int_G\left[\int_G F\left(x^{-1}y\right)f_i(y)dy\right]\overline{f_i(x)}dx\\&=\int_G Tf_i(x)\overline{f_i(x)}dx=a\int_G|f_i(x)|^2dx,\end{aligned}$$

这与 $W_a\neq 0$ 矛盾. 所以我们得到 $U^{\perp}=0$, 即 $L^2(G)=U$.

(2) 从 (1) 容易得到.

(3) 根据 (2), 任意 $f\in L^2(G)$ 可表达为 L^2 收敛的级数:

$$f(x)=\sum_{\pi\in\hat{G}}d_\pi\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d_\pi}\pi_{ij}(x)\int_G\overline{\pi_{ij}(y)}f(y)dy.$$

作变换 $y^{-1} \mapsto y$, 得

$$
\begin{aligned}
& d_\pi \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d_\pi} \pi_{ij}(x) \int_G \overline{\pi_{ij}(y)} f(y) dy \\
= & d_\pi \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant d_\pi} \pi_{ij}(x) \int_G \pi_{ji}(y) f\left(y^{-1}\right) dy \\
= & d_\pi \sum_{i=1}^{d_\pi} \int_G \pi_{ii}(xy) f\left(y^{-1}\right) dy = d_\pi \chi_\pi * f(x).
\end{aligned}
$$

另一方面, 从法正交基定义便可得 Plancherel 公式 ([Rud 87] Thm. 4.18).

(4) 设

$$
\widetilde{E}_\tau v = d_\tau \int_G \overline{\chi}_\tau(x) \pi(x) v dx,
$$

则

$$
\widetilde{E}_\tau^* = d_\tau \int_G \chi_\tau\left(x^{-1}\right) \pi(x) dx = \widetilde{E}_\tau,
$$

$$
\widetilde{E}_\tau \widetilde{E}_{\tau'} = d_\tau d_{\tau'} \int_G (\overline{\chi}_\tau * \overline{\chi}_{\tau'})(x) \pi(x) dx = 0,
$$

其中 τ 与 τ' 不等价.

$$
\widetilde{E}_\tau^2 = d_\tau^2 \int_G (\overline{\chi}_\tau * \overline{\chi}_\tau)(x) \pi(x) dx = d_\tau \int_G \overline{\chi}_\tau(x) \pi(x) dx = \widetilde{E}_\tau.
$$

因此, $\{\widetilde{E}_\tau\}$ 是一组互相垂直的正交投影.

取 $U \in [\tau, \pi]$. 设 $u_1, \cdots, u_n$ 是 U 的法正交基, $\pi_{ij}(x) = (\pi(x)u_i, u_j)$, 则

$$
\begin{aligned}
\chi_\tau(x) &= \sum_{i=1}^n \pi_{ii}(x), \\
\pi(x) u_j &= \sum_{i=1} \pi_{ij}(x) u_i.
\end{aligned}
$$

用 Schur 正交关系, 得

$$
\widetilde{E}_\tau u_j = d_\tau \int_G \overline{\chi}_\tau(x) \pi(x) u_j dx = d_\tau \int_G \sum_{i,k} \overline{\pi_{kk}(x)} \pi_{ij}(x) u_i dx = u_j,
$$

即 $\widetilde{E}_{\tau|U}$ 是恒等映射.

另一方面, 取 $U \in [\tau', \pi]$, $u \in U$, τ' 与 τ 不等价, 则 $\widetilde{E}_\tau u = \widetilde{E}_\tau \widetilde{E}_{\tau'} u = 0$.

把 V 写为有限维不可约不变子空间的正交和: $V = \bigoplus U$, 则显然上面的讨论告诉我们: 如果 $U \in [\tau, \pi]$, 则 $E_\tau|_U = \widetilde{E}_\tau|_U$; 如果 τ 与 τ' 不等价, $U \in [\tau', \pi]$, 则 $E_\tau|_U = \widetilde{E}_\tau|_U = 0$. □

从 Peter-Weyl 定理可见集合 $[\tau,\pi]$ 的个数是 $\dim(\mathrm{Im}E_\tau)/d_\tau$, 这个数记为 $(\pi:\tau)$. 可以说 τ 在 π 中出现 $(\pi:\tau)$ 次. 利用 Schur 正交关系可见 $\dim\left(E_\tau\left(L^2(G)\right)\right)=d_\tau^2$. 所以, 如果 λ 是 G 在 $L^2(G)$ 上的左正则表示, 则 $(\lambda:\tau)=d_\tau$.

命题 4.2.5 设紧群 G 有酉表示 (π,V^π), (τ,V^τ), 其中 τ 是不可约. 则

$$(\pi:\tau)=\dim\ \mathrm{Hom}_G(V^\pi,V^\tau)=\dim\ \mathrm{Hom}_G(V^\tau,V^\pi).$$

证明 据 Schur 引理和 Peter-Weyl 定理, 若 $T\in\mathrm{Hom}_G(V^\pi,V^\tau)$, 则 $T(E_\tau V^\pi)^\perp=0$. 把 $E_\tau V^\pi$ 写为不可约子空间 V_α 的正交和, 则每个 V_α 与 V^τ 等价. 所以

$$\dim\ \mathrm{Hom}_G(V_\alpha,V^\tau)\geqslant 1.$$

引用 Schur 引理, 便知 $\dim\ \mathrm{Hom}_G(V_\alpha,V^\tau)=1$. 所以

$$(\pi:\tau)=\dim\ \mathrm{Hom}_G(V^\pi,V^\tau).$$

取共轭, 得

$$\dim\ \mathrm{Hom}_G(V^\pi,V^\tau)=\dim\ \mathrm{Hom}_G(V^\tau,V^\pi).$$ □

设 H 是紧群 G 的闭子群, (τ,V^τ) 是 H 的酉表示. 定义

$$V^\pi=\left\{G\xrightarrow{f}V^\tau\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{(i)}\ \displaystyle\int_G|f(x)|^2dx<\infty,\\ \text{(ii)}\ \forall y\in H,\ f(xy)=\tau(y)^{-1}f(x)\ \text{几乎处处对}\ x\in G\ \text{成立.}\end{array}\right\}$$

G 在 V^π 上的作用如下:

$$\pi(s)f(x)=f\left(s^{-1}x\right).$$

称 π 是从 τ 到 G 的诱导表示 (induced represention), 记为 $\mathrm{ind}_H^G\tau$.

定理 4.2.2(Frobenius 互反公式) 设 H 为紧群 G 的闭子群 (τ,V^τ) 是 H 的不可约酉表示, σ 是 G 在 V^σ 上的不可约酉表示, $\pi=\mathrm{ind}_H^G\tau$ 作用在 V^π 上, 则

$$(\mathrm{ind}_H^G\tau:\sigma)=(\sigma|_H:\tau).$$

证明 因为 $V^\pi\subset L^2(G,V^\tau)$, $L^2(G,V^\tau)$ 是 d_τ 个 $L^2(G)$ 的直和, 即

$$L^2(G,V^\tau)=\underbrace{L^2(G)\bigoplus\cdots\ominus L^2(G)}_{d_\tau\ \text{个}},$$

所以, σ 在 $L^2(G,V^\tau)$ 中出现 $d_\tau d_\sigma$ 次. 于是 $(\pi:\sigma)\leqslant d_\tau d_\sigma$.

对 G 上的函数 f, 以 $\delta(f)$ 记 $f(e)$, e 为 G 的单位元. 考虑线性映射所组成的线性空间 $\mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\pi)$ 中的元 A. 对 $v \in V^\sigma$, $y \in H$, 下式成立:

$$\tau(y)(\delta Av) = \tau(y)[Av(e)] = Av(y^{-1}) = (\pi(y)(Av))(e) = (A\sigma(y)v)(e) = \delta A\sigma(y)v,$$

所以, $\delta A \in \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\tau)$.

$\delta : \mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\pi) \to \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\tau)$ 是单映射. 理由如下: 设 $\delta Av = 0$, $\forall v \in V^\sigma$, 则 $(Av)(e) = 0$, $\forall v \in V^\sigma$. 取 $v = \sigma(x)^{-1}v'$, 则

$$0 = (Av)(e) = \big(A\sigma(x)^{-1}v'\big)(e) = \big(\pi(x)^{-1}Av'\big)(e) = (Av')(x).$$

也就是说 $Av' = 0$, $\forall v'$, 所以 $A = 0$.

下面证明 δ 是满映射. 取 $B \in \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\tau)$, 定义

$$Av(x) = B\big(\sigma(x)^{-1}v\big), \quad v \in V^\sigma, \ x \in G,$$

则

$$Av(xy) = B\big(\sigma(y)^{-1}\sigma(x)^{-1}v\big) = \tau(y)^{-1}B\sigma(x)^{-1}v = \tau(y)^{-1}Av(x).$$

所以 $Av \in V^\pi$. 作计算

$$(\pi(x_0)Av)(x) = Av\big(x_0^{-1}x\big) = B\big(\sigma(x)^{-1}(\sigma(x_0)v)\big) = A(\sigma(x_0)v)(x),$$

所以 $\pi(x_0)A = A\sigma(x_0)$, 即 $A \in \mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\pi)$. 最后有

$$\delta Av = Av(e) = B(\sigma(e)v) = Bv,$$

即 $\delta A = B$.

综上所述, 有

$$\dim\ \mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\tau) = \dim\ \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\pi).$$

于是

$$\begin{aligned}(\sigma|_H : \tau) &= \dim\ \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\tau) = d_\sigma d_\tau \geqslant (\pi : \sigma) \\ &= \dim\ \mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\pi) = \dim\ \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\tau).\end{aligned}$$

定理得证. □

4.3 紧群的淡中对偶

淡中忠郎 (Tannaka, 1908~1986), 日本数学家. 淡中对偶是问怎样从群 G 的表示构造出 G. 淡中对偶有很多推广, 我们介绍 [DR 89], [Del 90]. 本节只讨论紧群的淡中对偶的初等性质. 我们需要用范畴的语言, 可看 [LZ 14] 第一章.

设 G 是一个紧群, 并且 (π, V_π), (σ, V_σ) 是 G 的有限维复表示. 一个从 π 到 σ 的 G-态射是指一个线性映射 $A : V_\pi \to V_\sigma$ 使得对任意 $x \in G$ 以下的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} V_\pi & \xrightarrow{\pi(x)} & V_\pi \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ V_\sigma & \xrightarrow{\sigma(x)} & V_\sigma \end{array}$$

由所有从 π 到 σ 的 G-态射所组成的集合记为 $\mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\sigma)$.

我们考虑 G 的有限维复表示范畴 $\mathscr{C}_G$. 这个范畴的对象是 G 的有限维复表示 (π, V_π). 在这个范畴内两个表示 π, σ 之间的态射是 G-态射 $\mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\sigma)$. 范畴 $\mathscr{C}_G$ 的对象所组成的集合 (类) 记为 $\mathrm{Obj}\mathscr{C}_G$.

向量空间 V 的所有线性映射 $V \to V$ 所组成的向量空间记为 $\mathrm{End}(V)$.

我们引入一个新的概念. 定义范畴 $\mathscr{C}_G$ 的一个表示 γ 为一个具有下述性质的集合 (类)$\gamma = \{\gamma_\pi : \pi \in \mathscr{C}_G\}$:

1. $\gamma_\pi \in \mathrm{End}(V_\pi)$.
2. 如果 $A \in \mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\sigma)$, 则下面的图表交换:

$$\begin{array}{ccc} V_\pi & \xrightarrow{\gamma_\pi} & V_\pi \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ V_\sigma & \xrightarrow[\gamma_\sigma]{} & V_\sigma \end{array}$$

3. $\gamma = (\gamma_\pi)$ 是乘性的, 亦即是说, 如果 $\pi, \sigma \in \mathscr{C}_G$, 当然 $\pi \bigotimes \sigma \in \mathscr{C}_G$, 我们要求

$$\gamma_{\pi \otimes \sigma} = \gamma_\pi \bigotimes \gamma_\sigma.$$

4. 如果 π 是酉表示, 则

$$\gamma_{\overline{\pi}} = \overline{\gamma_\pi}.$$

由 $\mathscr{C}_G$ 的表示所组成的集合记为 $\mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G)$.

一个基本的例子: 固定一个 $s \in G$, 则

$$\gamma^s = \{\pi(s) : \pi \in \mathrm{Obj}\mathscr{C}_G\}$$

是范畴 $\mathscr{C}_G$ 的一个表示. 事实上, 根据 G-态射的定义知: 若 $A \in \mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\sigma)$, 则 $A\pi(s) = \sigma(s)A$, 并有

$$(\pi \bigotimes \sigma)(s) = \pi(s) \bigotimes \sigma(s),$$

及如果 π 为酉表示, 则 $\overline{\pi(s)} = \overline{\pi}(s)$. 我们以 γ_π^s 记 $\pi(s)$, 即 $\gamma^s = \{\gamma_\pi^s\}$. 如此便得映射

$$G \to \mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G) : s \mapsto \gamma^s.$$

现在推导几个关于 $\mathscr{C}_G$ 的表示的性质. 我们以 $\{\gamma_V\}$ 记 $\{\gamma_\pi\}$.

命题 4.3.1 (1) 以 $(\pi_0, \mathbb{C})$ 记 G 的一维单位表示, 则 $\gamma_0 = \gamma_{\pi_0} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$.

(2) 如果 (π, V) 和 (σ, W) 是 $\mathscr{C}_G$ 的两个元素, 则

$$\gamma_{V \oplus W} = \gamma_V \bigoplus \gamma_W.$$

(3) 对于 $\pi \in \mathscr{C}_G$, 有 $\gamma_{\check{\pi}} = \check{\gamma}_\pi$

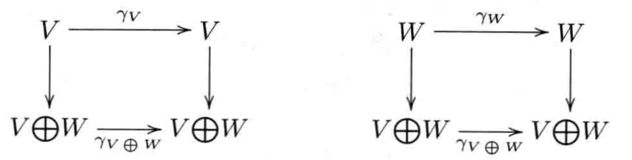
(4) 如果 π 是酉表示, 则 γ_π 也酉表示.

证明 (1) 事实上, γ_0 必定是用某个 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ 作标量乘积给出的, 再由上述的性质 2 知

$$\gamma_0 = \gamma_{\pi_0 \otimes \pi_0} = \gamma_0 \bigotimes \gamma_0,$$

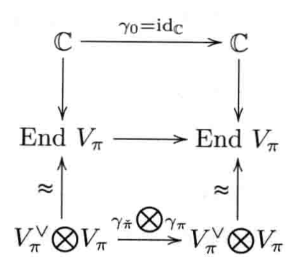
因此 $\lambda^2 = \lambda$, 即有 $\lambda = 1$.

(2) 为了证明此结论, 我们考虑 G-态射 $V \Rightarrow V \bigoplus W$ 和 $W \Rightarrow V \bigoplus W$ 以及相应的交换图表



图表的交换性意味着 $\gamma_{V \oplus W}$ 保持 $V \cong V \bigoplus \{0\}$ (类似地 W) 不变, 从而在它里面诱导出 γ_V (相应地 γ_W). 于是 $\gamma_{V \oplus W} = \gamma_V \bigoplus \gamma_W$.

(3) 按通常的方式把 $V_\pi^\vee \bigotimes V_\pi$ 和 $\mathrm{End}(V_\pi)$ 等同起来, 则表示 $\check{\pi} \bigotimes \pi$ 转化为表示 $A \mapsto \pi(x) \circ A \circ \pi(x)^{-1}$. 这个表示保持标量算子不动, 于是由一维单位表示 $(\pi_0, \mathbb{C})$ 到 $(\check{\pi} \bigotimes \pi, \mathrm{End}\ V_\pi)$ 的一个 G-态射使得下面的图表交换:



由表示定义条件 3, 有 $\gamma_{\check{\pi}\bigotimes\pi} = \gamma_{\check{\pi}}\bigotimes\gamma_\pi$, 其作用为

$$A \mapsto \gamma_\pi \circ A \circ {}^t\gamma_{\check{\pi}}.$$

由图表的交换性即知 $\mathrm{id} = \gamma_\pi \circ {}^t\gamma_{\check{\pi}}$ (V_π 上的 id 对应于 $1 \in \mathbb{C}$), 即有

$$\gamma_{\check{\pi}} = {}^t\gamma_\pi^{-1} = \check{\gamma}_\pi.$$

(或者说: 如果 (e_i) 是 $V = V_\pi$ 的一组基, (ε_i) 是 $V^\vee$ 中的对偶基, 则 G-态射 $\pi_0 \longrightarrow \check{\pi}\bigotimes\pi$ 把 $1 \in \mathbb{C}$ 映到 $\sum \varepsilon_i\bigotimes e_i$, 同时图表的交换性要求

$$\sum \varepsilon_i\bigotimes e_i = \gamma_{\check{\pi}}\bigotimes\gamma_\pi \sum \varepsilon_i\bigotimes e_i = \sum \gamma_{\check{\pi}}(\varepsilon_i)\bigotimes\gamma_\pi(e_i).$$

但是 $(\gamma_\pi(e_i))$ 的对偶基 $\eta_i = \gamma_{\check{\pi}}(\varepsilon_i)$ 被

$$\sum \varepsilon_i\bigotimes e_i = \sum \eta_i\bigotimes\gamma_\pi(e_i)$$

唯一刻画, 所以 $\gamma_{\check{\pi}}(\varepsilon_i) = \check{\gamma}_\pi(\varepsilon_i)$, 于是 $\gamma_{\check{\pi}} = \check{\gamma}_\pi$).

(4) 由表示定义条件 4, 有 $\gamma_{\overline{\pi}} = \overline{\gamma}_\pi$. 但 $\overline{V} \cong V^\vee$, 便有 $\overline{\pi} = \check{\pi}$. 于是

$$\overline{\gamma}_\pi = \gamma_{\check{\pi}} = \check{\gamma}_\pi, \qquad \gamma_\pi^{-1} = {}^t\overline{\gamma}_\pi = \gamma_\pi^*.$$

由 $\mathscr{C}_G$ 的表示所组成的集合记为 $\mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G)$. 设有 $\mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G)$ 的元素 $\gamma = \{\gamma_\pi\}$, $\eta = \{\eta_\pi\}$, 定义 $\eta\gamma$ 为 $\{\eta_\pi \circ \gamma_\pi\}$. 以此为乘积, 易见 $\mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G)$ 有群的结构. 此群的单位元是 $\{\mathrm{id}_{V_\pi}\}$. 对于 $\mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G)$ 的这个群结构, 前面所得的映射

$$G \to \mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G)$$
$$s \mapsto \gamma^s$$

是群同态.

下一步我们确定 $\mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G)$ 的拓扑. 在 $\mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G)$ 上取点点收敛拓扑 (pointwise convergence topology, [Dug 66] XII §9), 即是说: 序列 $\gamma^{(n)} = \{\gamma_\pi^{(n)}\}$ 收敛于 $\gamma = \{\gamma_\pi\}$ 若对所有 π, 在 $\mathrm{End}(V_\pi)$ 内 $\gamma_\pi^{(n)}$ 收敛于 γ_π. 现可证 $\mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G)$ 是拓扑群, 并且同态

$$G \to \mathrm{Rep}(\mathscr{C}_G) : s \mapsto \gamma^s$$

是连续.

另一方面, 有限维空间 V 的酉群 $U(V)$ 是紧群. 我们以 $\hat{G}$ 记 G 的不可约酉表示等价类所组成的集合. 由于在紧群 G 的任一有限维表示空间上都是可以取适当

内积令此表示成为酉表示, 并且 G 的任一有限维表示都是不可约表示的和, 所以有连续同态

$$\operatorname{Rep}(\mathscr{C}_G) \longrightarrow \prod_{\hat{G}} U(V_\pi): \quad (\gamma_\pi)_{\mathscr{C}_G} \mapsto (\gamma_\pi)_{\pi\in\hat{G}}.$$

此同态的像是闭的, 因此知 $\operatorname{Rep}(\mathscr{C}_G)$ 是紧群.

定理 4.3.1(淡中对偶) 同态

$$G \longrightarrow \operatorname{Rep}(\mathscr{C}_G)$$
$$s \mapsto \gamma^s$$

是拓扑群的同构.

首先根据 Peter-Weyl 定理知定理中的连续同态是单射, 而且它决定了一个从 G 到它的像的一个同胚. 余下只需证明定理中的同态是满射. 为此我们先证一个引理.

引理 4.3.1 设 (π, V_π) 是 G 的一个有限维表示. 如果 $v \in V_\pi$ 是一个不动向量, 即 $\pi(s)v = v$, $\forall s \in G$, 则对任意

$$\gamma = \{\gamma_\sigma\} \in \operatorname{Rep}(\mathscr{C}_G),$$

必有 $\gamma_\pi(v) = v$.

证明 根据假设 $v \in V^G$, 我们可以借助于把 1 映到 v 定义从一维单位表示 $(\pi_0, \mathbb{C})$ 到 (π, V) 的 G-态射. 这样我们得到交换图表

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \in & \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ v & \in & V & \xrightarrow{\gamma_V} & V \end{array}$$

立得结论! □

定理 4.3.1 的证明 $G \to \operatorname{Rep}(\mathscr{C}_G)$ 的像中的元素是满足下述条件的 γ: 存在 $s \in G$ 使得 $\gamma_\pi = \pi(s)$ $(\forall \pi \in \mathscr{C}_G)$. 反过来说, 即

$$\gamma \notin \operatorname{Image}(G) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{对于任一} s \in G, \text{存在} (\pi, V) \in \mathscr{C}_G, \\ \text{使得} \gamma_V \neq \pi(s). \end{cases}$$

我们来证明这样的 $\gamma(\notin \operatorname{Image}(G))$ 的存在将导致矛盾. 注意条件 $\gamma_V \neq \pi(s)$ 定义了 G 中包含 s 的一个开集. 由于 G 是紧的, 所以我们可以找到有限多个 s_i 使得它们所对应的开集覆盖 G. 这些 s_i 都对应于 G 的有限维表示 (π_i, V_i). 我们考虑 $W = \bigoplus V_i$ (有限维表示的有限和) 以及 $\gamma_W = \bigoplus \gamma_{V_i}$ (见上述的结论 b). $\gamma \notin \operatorname{Image}(G)$ 意味着

存在 $\sigma = \bigoplus \pi_i$ 使得 $\gamma_W \notin \sigma(G) \subset GL(W)$. $\sigma(G)$ 和 $\sigma(G)\gamma_W$ 这两个紧子集不相交, 于是可以构造连续函数使得它在第一个紧子集上取值为 0 而在第二个紧子集上取值为 1. 通过用多项式函数一致逼近, 可以找到 $\mathrm{End}(W)$ 上的一个多项式 P 满足

$$|P| \leqslant \frac{1}{3} \quad (\text{在}\sigma(G)\text{上}), \qquad |P| \geqslant \frac{2}{3} \quad (\text{在}\sigma(G)\gamma_W\text{上}).$$

用 Haar 测度在 G 上对 P 做平均, 我们构造出多项式 Q (其次数小于或等于 P 的次数)

$$Q(A) = \int_G P(\sigma(t)A)\mathrm{d}t.$$

这个多项式 Q 具有下述性质:

$$Q(A) = Q(\sigma(s)A) \quad (\forall\ s \in G), \qquad Q(A) \neq Q(\gamma_W A).$$

但是 G 在 $\mathrm{End}(W)$ 上的次数小于或等于 $\deg P$ 的多项式空间里的有限维表示矛盾于上述引理的论断 (在上述引理中取不动向量 $v = Q$). □

4.4 李　　群

李群是最重要的一类拓扑群. 几乎所有在物理学及化学中所使用的拓扑群是李群. Hilbert 所提出的 23 个问题之一的答案是: 凡连通局部 Euclid 拓扑群必同构于李群 (见 [MZ 55] 184 页). 因篇幅所限我们并不会详论李群. 我们的目的只是提供李群的定义和一些常见的例子. 关于李群我们推荐两本很好的书: [YX 85], [HHM 92]; 英文比较新的书有: [DK 00], [Kna 02]. 我们假设读者有微分流形的知识, 如 [Che 03], [War 83].

设群 G 有微分流形结构, 使得映射

$$G \times G \to G : (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

可微, 则称 G 为李群 (Lie group; 这是为纪念挪威数学家 Sophus Lie (1842~1899) 而命名的). 显然李群是拓扑群. 最简单的李群便是实数 $\mathbb{R}$ 以加法为运算, 即 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x - y$ 是可微函数. 我们将在后面给出更复杂的例子.

因为李群 G 是微分流形, 所以在 G 的单位元 e 有切空间 G_e. 不像一般微分流形, 这个向量空间 G_e 有个很好的代数结构, 称为李代数. 正是因为这个结构, 李群的性质就比一般的流形或拓扑群丰富多了. 以下我们先谈这个李代数.

李群 G 的元 g 定义可微同胚 $l_g : G \to G : x \mapsto gx$.

一个流形的向量场是指这个流形的切向丛的一个截面, 称李群 G 的向量场 X 为左不变如果对任意 $g \in G$ 均有 $dl_g(X_x) = X_{gx}$, $x \in G$. 这个公式亦可写为

$dl_g \circ X = X \circ l_g$. 我们以 $\mathscr{G}$ 记由 G 的所有左不变向量场所组成的集合. 显然 $\mathscr{G}$ 是实向量空间, 映射

$$\mathscr{G} \to G_e : X \mapsto X_e$$

是向量空间线性同构.

进一步我们便需要知道流形 M 的向量场 X 是对应于微分算子如下: 从 $x \in M$ 得 $X_x \in T_xM = M$ 在 x 点的切空间. 设 $(U, x_1, \cdots, x_n)$ 为 M 在点 x 的局部坐标, 则 X_x 对应于一组 U 上的光滑函数 $a_1(u), \cdots, a_n(u)$ 使得若 f 为光滑函数, 便有

$$(Xf)(u) = X_u f = \sum a_i(u) \frac{\partial f}{\partial x_i}(u), \quad u \in U.$$

显然 Xf 是光滑函数.

现设 X, Y 为微分流形 M 的向量场. 对 $x \in X$, 光滑函数 f, 定义

$$[X, Y]_x(f) = X_x(Yf) - Y_x(Xf).$$

易证 $x \mapsto [X, Y]$ 为 M 的向量场. 称 $[X, Y]$ 为 X, Y 之李括积 (Lie bracket product).

设 $\mathcal{L}$ 为实向量空间, 并有双线性映射

$$\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L} : (X, Y) \mapsto [X, Y],$$

使得 (1) $[X, Y] = -[Y, X]$;

(2) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobi 等式), 则称 $\mathcal{L}$ 为实李代数.

不难证明以下命题.

命题 4.4.1 设 G 为李群, 则由 G 的所有左不变向量场所组成的集合 $\mathscr{G}$ 以李括积成为实李代数. 利用同构 $\mathscr{G} \leftrightarrow G_e$ 亦可把 G 在单位元 e 的切空间 G_e 看为实李代数. 我们常称 $\mathscr{G}$ 为李群 G 的李代数.

前面关于李代数的讨论隐藏了另一个重要的结构 —— 指数映射. 以 $\mathbb{R}_+$ 记所有正实数 $\mathbb{R}_+$ 以乘法为群, 则指数函数

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto \exp(x)$$

是群同态, 即 $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

为了介绍李群的指数映射我们先谈切映射. 设有光滑流形 M, N, 光滑映射 $\varphi : M \to N$, 并设 $p \in M, q = \varphi(p) \in N$. M 在 p 点的切向量空间记为 T_pM. 同样有 T_qN. 则 φ 的切映射 $d\varphi : T_pM \to T_qN$ 是由 φ 的 Jacobi 矩阵所给出的线性映射 (见 [Che 03] 2.3.5, 2.3.6 节). 常称光滑映射 $\mathbb{R} \to M$ 为 M 上的一条曲线.

李群 G 的单参数子群是指一个由实数加法群 $\mathbb{R}$(作为一个李群) 到 G 中的可微同态 $\varphi : \mathbb{R} \to G$. 也就是说, φ 是 G 上的一条曲线并且对 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, 有

$$\varphi(t_1 + t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2).$$

此时 $\varphi(0) = e$(G 的单位元). φ 的切映射 $d\varphi : T_0(\mathbb{R}) \to T_e(G) = \mathscr{G}$, 即有 $d\varphi\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right) \in \mathscr{G}$.

定理 4.4.1 设 G 为李群, $\mathscr{G}$ 为 G 的李代数, $X \in \mathscr{G}$, 则存在唯一的单参数子群 $\varphi_X : \mathbb{R} \to G$ 使得 $d\varphi_X\left(\lambda\dfrac{\partial}{\partial t}\right) = \lambda X,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

证明 见 [HHM 92], 第二章 §1, [YX 85] 定理 1.4.5.

我们以 $\exp(tX)$ 记 $\varphi_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$. 如此便得映射 $\exp : \mathscr{G} \to G$. 称此为指数映射. 在 [YX 85] 第一章第 4 节有很多关于这个映射的性质, 比如

$$\exp(t_1 + t_2)X = (\exp t_1 X)(\exp t_2 X), \quad \exp(-tX) = (\exp tX)^{-1},$$
$$\exp(sX)\exp(tX)\exp(-sX)\exp(-tX) = \exp(st[X,Y]) + \text{含}s,t\text{二次以上之项}.$$

一般来说 $\exp(\mathscr{G})$ 不等于 G, 但是当 G 连通时, $\exp(\mathscr{G})$ 是生成 G 的 (见 [YX 85] 引理 1.4.8). 还说一句: 物理学家常用一个比较古的语言, 他们称一个李群 G 的李代数 $\mathscr{G}$ 的一个基本的元素为无穷小生成元 (infinitesimal generators), 又称 $X \in \mathscr{G}$ 生成单参数子群 φ_X.

要了解李群的基本性质就必须念念我们开始时所提到的教科书之一. 余下我们只是谈谈一些例子.

以 $M(n)$ 记 $n \times n$ 实系数矩阵, 即 $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. A 的迹记为 $\mathrm{tr}A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$. 以 $\det A$ 记 A 的行列式. 单位矩阵是 $I = (\delta_{ij})$, 其中 $\delta_{ij} = 0$(若 $i \neq j$) 及 $\delta_{ii} = 1$.

把 $M(n)$ 看作 $\mathbb{R}^{n^2}$ 便得 $M(n)$ 的微分流形结构. $\mathbb{R}^{n^2}$ 任一点的切空间同构于 $\mathbb{R}^{n^2} \approx M(n)$. 因为 det 是多项式函数, 故可微, 于是 $\{A : \det A = 0\}$ 是 $M(n)$ 的闭子流形. 设

$$GL(n) = \{A \in M(n) : \det A \neq 0\},$$

则 $GL(n)$ 是 $M(n)$ 的开子流形. $GL(n)$ 在单位矩阵 I 的切空间 $GL(n)_I = M(n)$. 以矩阵乘法使 $GL(n)$ 有群的结构. 因为矩阵乘法 $A, B \mapsto AB$ 是多项式函数, 求逆 $A \mapsto A^{-1}$ 是有理函数, 故知 $GL(n)$ 是李群. 以 $gl(n)$ 记 $GL(n)$ 的李代数.

对矩阵 $A = (a_{ij})$ 设 $|A| = \sum\limits_{i,j} |a_{ij}|$. 不难证明 $M(n) = \mathbb{R}^{n^2}$ 以 $|A|$ 为范数成为 Banach 空间, 而且 $|A^k| \leqslant |A|^k$. 于是 $\left|\dfrac{A^k t^k}{k!}\right| \leqslant \dfrac{|A|^k t^k}{k!}$. 因为

$$e^{|A||t|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A|^k t^k}{k!}$$

收敛, 所以 $M(n)$ 内的无穷级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!}$, $t\in\mathbb{R}$ 在 $M(n)$ 内收敛. 以 e^{At} 记此无穷级数.

以 x 为 n 元变量. 取 $A\in M(n)$ 及 $a\in\mathbb{R}^n$. 容易验证以下一阶常系数微分方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax,\qquad x(O)=a$$

以 $x=e^{At}a$ 为唯一解. 现取 $s,t\in\mathbb{R}$. 设 $Y(t)=e^{A(t+s)}$, $Z(t)=e^{At}e^{As}$, 则 $Y(t)$, $Z(t)$ 均为以下始值问题

$$\frac{dx}{dt}=Ax,\qquad x(O)=e^{As}$$

之解. 由唯一性得 $Y(t)=Z(t)$, 即

$$e^{A(t+s)}=e^{At}e^{As}.$$

综上所述得知: 取李群 $GL(n)$ 之李代数 $gl(n)$ 的元素 A, 则

$$\mathbb{R}\to GL(n):t\mapsto e^{At}$$

为单参数子群, 并且 e^{At} 就是前面所述的 $\exp(tA)$. 直接运算还可验证

$$\exp(sA)\exp(tB)\exp(-sA)\exp(-tB)=\exp(st(AB-BA))+\text{含 } s,\ t \text{ 二次以上项}.$$

从此得知 $gl(n)$ 上的李括积应该是矩阵之交换子:

$$[A,B]=AB-BA.$$

这样便确定了李群 $GL(n)$ 的李代数 $gl(n)$ 了.

取李群 G. 设 (1) H 是 G 的一个 (平常) 子群 (即是说把 G 只看一个群); (2) H 是李群; (3) 以 $i:H\to G:x\mapsto x$ 记包含映射, 我们要求切映射 $\mathrm{d}i_x$ 在每点 $x\in H$ 是单射, 则称 H 为 G 的李子群.

现设 G 为 $GL(n)$ 的李子群. $\mathscr{G}$ 为 G 的李代数. I 为单位矩阵. 由定义知 $\mathrm{d}i_I$ 为线性单射. 显然

$$\mathscr{G}=\{X\in gl(n)|e^{tX}\in\mathscr{G}\text{ 对所有 } t\in\mathbb{R}\}.$$

常称这样的 G 为典型群 (classical group).

作为一个例子. 设 x_j 为 $x\in\mathbb{R}^n$ 的第 j 个坐标, 则 $\mathbb{R}^n$ 的标准内积是 $\langle x,y\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j$. 若对任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$, $R\in GL(n)$ 满足条件

$$\langle Rx,Ry\rangle=\langle x,y\rangle,$$

则称 R 为 n 维正交变换. 此条件成立当且仅当

$$R^{\mathrm{T}}R = RR^{\mathrm{T}} = I,$$

R^{T} 表示矩阵 R 的转置. 我们记

$$SO(n) = \{R \in GL(n) | R^{\mathrm{T}}R = RR^{\mathrm{T}} = I,\ \det R = 1\}.$$

称此为特殊正交群 (special orthogonal group). $SO(n)$ 为 $GL(n)$ 的李子群. 以 $so(n)$ 记 $SO(n)$ 的李代数. 设 $X \in so(n)$, 则 $e^{tX} \in SO(n)$, 即 $I = \left(e^{tX}\right)\left(e^{tX}\right)^{\mathrm{T}} = e^{tX}e^{tX^{\mathrm{T}}}$. 对此等式求 $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0}$ 即得 $O = X + X^{\mathrm{T}}$. 因知

$$so(n) = \{X \in gl(n) | X + X^{\mathrm{T}} = 0\}.$$

由于 $SO(n)$ 是连通李群, 所以, 若 $\{L_j\}$ 是线性空间 $so(n)$ 的基, 则 $\{e^{tL_j}\}$ 生成李群 $SO(n)$. 因此常称这些 L_j 为 $SO(n)$ 的无穷小生成元.

考虑李代数 $so(3)$. 它的元素 A 是 3×3 反对称矩阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

易验证

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

为李代数 $so(3)$ 的一个基. 利用

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

可得

$$e^{\theta L_3} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

此乃以 x_3-坐标轴为轴转过 θ 角的三维空间转动. 同样可得 $e^{\theta L_1}$, $e^{\theta L_2}$ 分别为 x_1-轴, x_2-轴为转轴之转动, 故知 $SO(3)$ 为转动所生成, 常称 $SO(3)$ 为三维空间转动群. 此为经典力学的重要变换群.

设 V 为有限维实向量空间. 以 $GL(V)$ 记 V 的线性自同构群. 由 V 到 V 的所有线性变换所组成的集合记为 $\mathrm{End}(V)$, 则以括积 $[A,B]=AB-BA$ 得 $\mathrm{End}V$ 的李代数结构. 事实上 $\mathrm{End}V$ 为李群 $GL(V)$ 的李代数.

取李群 G. 设 π 为 G 在有限维向量空间上的表示, 即有群同态 $\pi: G\to GL(V)$. 设 $\mathscr{G}$ 为 G 的李代数. 取 $X\in\mathscr{G}$, $v\in V$, 定义

$$\pi(X)v:=\left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}\pi(\exp tX)v.$$

不难证明 $X\to\pi(X)$ 为 $\mathscr{G}$ 的李代数表示, 即有李代数同态 $\pi:\mathscr{G}\to\mathrm{End}V$ 满足条件 $\pi([X,Y])=[\pi X,\pi Y]$. 同样定义可推广至无穷维空间上.

回头看 $SO(3)$. 考虑量子力学中转动对波函数 ψ 的作用. 以 $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 记三维空间上的光滑函数所组成的向量空间. $SO(3)$ 在 $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ 有左正则表示 (left regular representation): $g\in SO(3)$, $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $x\in\mathbb{R}^3$,

$$(\pi(g)f)(x)=f\left(g^{-1}x\right).$$

从

$$(\pi(h)(\pi(g)f))(x)=(\pi(g)f)\left(h^{-1}x\right)=f\left(g^{-1}h^{-1}x\right)=f\left((hg)^{-1}x\right)=(\pi(hg)f)(x),$$

得 $\pi_h\pi_g=\pi_{hg}$. 现取 $SO(3)$ 的李代数 $so(3)$ 的元素 X, 则由定义,

$$\begin{aligned}(\pi(X)f)(x)&=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(\pi(\exp tX)f)(x)\\&=\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}f\left((\exp tX)^{-1}x\right)\\&=\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(f(\exp(-tX)\cdot x)-f(x)).\end{aligned}$$

现取 $L_3\in so(3)$. 由前面 e^{tL_3} 的计算和三角函数的幂级数展开便得

$$\begin{aligned}f\left(e^{-tL_3}x\right)&=f\begin{pmatrix}1+o(t^2)&t+o(t^2)&0\\-t+o(t^2)&1+o(t^2)&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\\&=f\begin{pmatrix}x_1+tx_2+o(t^2)\\x_2-tx_1+o(t^2)\\x_3\end{pmatrix}\\&=f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}x_2\\-x_3\\0\end{pmatrix}+o(t^2)\right)\\&=f(x)+tx_2\frac{\partial f}{\partial x_1}-tx_1\frac{\partial f}{\partial x_2}+o(t^2),\end{aligned}$$

我们用了函数 f 的 Taylor 级数展开. 于是便得

$$(\pi(L_3)f)(x) = \left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)f(x).$$

同样可算出 $\pi(L_1)$, $\pi(L_2)$. 于是, 从李群 $SO(3)$ 的左正则表示得出李代数 $so(3)$ 的表示:

$$\begin{aligned}\pi(L_1) &= x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3},\\ \pi(L_2) &= x_1\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_1},\\ \pi(L_3) &= x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

在经典力学中角动量是

$$\vec{l} = \vec{r}\times\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ p_{x_1} & p_{x_2} & p_{x_3}\end{vmatrix} = l_1\vec{i} + l_2\vec{j} + l_3\vec{k},$$

其中 $l_1 = x_2p_{x_3} - x_3p_{x_2}$, $l_2 = x_3p_{x_1} - x_1p_{x_3}$, $l_3 = x_2p_{x_1} - x_1p_{x_2}$. 按 Schrödinger 表示量子化, 对应的算子是

$$i\hbar\pi(L_1), \qquad i\hbar\pi(L_2), \qquad i\hbar\pi(L_3).$$

这样我们看见 $so(3)$ 和量子力学的关系.

最后我们介绍 $SO(3)$ 的表示. $SO(3)$ 的元素是转动, 即不改变向量的长度, 所以把球面

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 |\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

的一点移至球面的另一点. 取 $\mathbb{R}^3$ 的标准基

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

若 $g \in SO(3)$, 则 $ge_3 \in S^2$. 取球面坐标

$$ge_3 = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

若 $ge_3 = e_3$, 则从矩阵乘法知 g 的第三列必为 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 但 g 是正交矩阵, 所以 g 的第三行是 $(0 \quad 0 \quad 1)$. 所以若 $ge_3 = e_3$, 则

$$g \in SO(2) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & \mathrm{A} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, A \in SO(2) \right\}.$$

现考虑映射 $\xi: \ SO(3) \to S^2: \ g \mapsto ge_3$. 我们首先证明 ξ 是满射. 为此取 $x \in S^2$. 利用 Gram-Schmit 正交化手续, 可得向量 v_1, v_2 使得 $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, $\langle v_1, x \rangle = 0$, $\langle v_2, x \rangle = 0$. 以 v_1, v_2, x 为列而得矩阵 $g = (v_1 \quad v_2 \quad x)$. 显然 $ge_3 = x$. 于是便得交换图

$$\begin{array}{ccc} SO(3) & \xrightarrow{\xi} & S^2 \\ \rho \downarrow & \nearrow_{\psi} & \\ SO(3)/SO(2) & & \end{array}$$

其中 $\psi(gSO(2)) = \xi(g)$. 现知 ψ 为双射.

在 $SO(3)/SO(2)$ 上取商拓扑, 在 $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ 取诱导拓扑, 则 ψ 为连续. 设 C 为 $SO(3)/SO(2)$ 的闭子集. 因为 $SO(3)/SO(2)$ 是紧拓扑空间, 所以 C 是紧子集. 因为 ψ 是连续, 所以 $\psi(C)$ 是 S^2 的紧子集. 因 S^2 是紧拓扑空间, 所以 $\psi(C)$ 是闭子集. 于是我们得知 ψ 是连续双射, 把闭集映成闭集, 故此 ψ 是同胚. 这样便证毕 $SO(3)/SO(2)$ 同胚于 S^2.

$SO(3)$ 以左平移作用在 $SO(3)/SO(2)$ 上:

$$x = hSO(2) \mapsto gx = ghSO(2), \quad g, h \in SO(3),$$

于是 $SO(3)$ 作用在 $L^2(S^2)$ 上: $g \in SO(3)$, $f \in L^2(S^2) \approx L^2(SO(3)/SO(2))$, $(\pi(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$.

按 Stone-Weierstrass 定理, $L^2(S^2)$ 有正交基

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} P_l^{-m}(\cos\theta),$$

其中 (θ, φ) 是球面坐标, m, l 是整数, $-l \leqslant m \leqslant l$, $P_l^m(X)$ 是如下定义的连带勒让德函数 (associated Legendre function):

$$P_l^m(x) = \frac{(1 - x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l.$$

(参看 [TC 61] 附篇二; [WG 65] 第五章.) 自然会问 $SO(3)$ 怎样作用在这些 Y_l^m 上?

取 $\mathbb{R}^3$ 上可微函数 f, 并取 $g \in SO(3)$. 设

$$(\pi(g)f)(x) = f\big(g^{-1}x\big), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

记 $y = g^{-1}x$. 用坐标写为 $Y_j = \sum_i g^{ij} x_i$, 其中 $\big(g^{ij}\big)$ 为矩阵 g^{-1}.

记 $\pi(g)f = h$. 于是

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial y_j}(y).$$

这样

$$\begin{aligned}\left(\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)(\pi(g)f)(x) &= \sum_i \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}(x) \\ &= \sum_i \left(\sum_k g^{ik} \frac{\partial}{\partial y_k}\right)\left(\sum g^{il} \frac{\partial f}{\partial y_l}(y)\right) \\ &= \sum_{k,l} \left(\sum_i g^{ik} g^{il}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l}(y) \\ &= \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial y_h^2}(y).\end{aligned}$$

因为 g 是正交矩阵, $\sum_i g^{ik} g^{il} = \delta_{kl}$.

我们称 $\varDelta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 为三维空间的 Laplace 算子. 若 $\varDelta f = 0$, 则称 f 为调和函数 (参看 [Gu 02] 第三章 §1). 从以上计算可见若 f 为调和函数, $g \in SO(3)$, 则 $\pi(g)f$ 亦是调和函数.

这些想法可推广到对称空间上 (见 [Hel 08]).

以 x_1, x_2, x_3 为变元的齐性多项式 f 若满足条件 $\Delta f = 0(\Delta = \text{Laplace}$ 算子), 则称 f 为调和多项式 (参 [TC 61] 附篇二 §2). 由所有次数为 l 的调和多项式所组的集合记为 H_l. 易证 H_l 是 $2l+1$ 维向量空间. 按以上讨论 $SO(3)$ 以左平移作用在 H_l 上. 从此得出 $SO(3)$ 在 H_l 上之表示, 记为 π_l.

定理 4.4.2　(1) π_l 是 $SO(3)$ 的不可约酉表示.

(2) 设 π 是 $SO(3)$ 的一个不可约酉表示, 则有正整数 l 使得 π_l 等价于 π (证明见 [Sug 90]II §7 Thm 7.2).

设 $f \in H_l$. 则 f 齐性是指

$$f(rx_1, rx_2, rx_3) = r^l f(x_1, x_2, x_3), \quad r \geqslant 0.$$

把 f 限制到球面 S^2 所得的函数记为 $\Phi(f)$. 记 $\Phi(H_l) = \{\Phi(f) : f \in H_l\}$. 称 $\Phi(H_l)$ 的元素为球面调和函数 (spherical harmonics).

定理 4.4.3 $\{Y_l^m | -l \leqslant m \leqslant l\}$ 是 $\Phi(H_l)$ 的基. (证明见 [Sug 90] II §7 Thm 7.3).

我们对 $SO(3)$ 的介绍就这些. 希望能增加读者对拓扑群的实际感觉. 我们所说的都出现在量子力学的教科书里. 事实上, 因为典型群有广泛的实用, 所有类似以上关于 $SO(3)$ 的详细计算都已做出来. 比较系统总结典型群的表示与特殊函数有 [VK 91] 一套 3 册, 如果你的兴趣是计算数学而你又对特殊函数有兴趣, 当然可以看这套书而学得一个重要的技能. 但是从理论的观点这项工作可以说是完成了.

紧李群的表示论是成熟的工作, 是大家必须知道的. 教本只是提示作者的安排和选择, 如 [BT 85], [FH 91], [Sep 07]. 但是因为数论的需要而要知道特殊的紧李群的表示的结构和分类, 那就是不容易的未完成的工作了, 单是 $GL(N)$ 可看 [BK 93], [BH 06].

非紧李群的表示最少可分为两类. 第一类是指实半单李群的无穷维酉表示, 比如 $SL_2(\mathbb{R})$ 是实李群. 第二类是指 P-进李群的表示, 比如 $SL_2(Q_p)$ (参看 [Sch 11]).

先讲第一类. 实半单李群无穷维表示的所有基本工作是 Harish Chandra 做的. 他是确定离散表示 (discrete series) 的第一人. 他的文章写得很好, 是几乎没有错误的. 值得从他学习正确的证明. 他的工作由几个人 ([Kna 01], [Var 77], [Wal 88]) 总结下来. 但还是老话, 除非你真的有个研究项目用得上这套学问, 否则你就要自问你花得起这么多时间学这个本事吗? Harish Chandra 之后还值得一提四个工作: (1) Langlands 在研究自守表示 L 函数时写了一篇文章分类表示 (参看 [ABV 92]). (2) 由 Bernstein, I.M.Gelfand, S.I.Gelfand 写的一篇文章. 从此发展出一套研究 BGG 范畴的学问 (参看 [Hum 08]). (3) 表示的上同调代数方法 (参看 [KV 95]), 其中也有一个小故事: Borel 说他想出来的方法, 文章是 Zuckerman 发表的, 把东西详细写下来却是 Vogan. (4) 用微分方程代数方法 (即 D-模理论) 重建 Harish Chandra 的成果 (参看 [HTT 08]), 这是京都大学的 Kashiwara 和哈佛大学的 W. Schmid 还在做的工作, 是很有趣的研究.

此外, Harish Chandra 的工作可以说是 L^2 分析. 那么李群的 L^p 分析 $(p \neq 2)$ 又怎样呢? 好像成果不多. 又按实李群的分类, 除了半单李群外, 还有可解李群 (参看 [AM 66]) 和幂零李群 (参看 [AT 75], [Tha 98]). 这两方面, 除非有全新的问题或应用, 也可以说是做完了.

第二类是 p-进李群 G 在无穷维空间 V 上的表示. 我们可以假设 V 是完满域 F 上的 Banach 空间. 我们分两部分: (I) F 是复数域; (II) F 是 P 进数域 $\mathbb{Q}_p$.

(I) 设 G 是定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的既约代数群的有理点. Harish Chandra 成功地把他在实半单李群的工作推到了 G 上, 但他在未发表他的工作之前去世了. 现

存只有藏在普林斯顿研究所他的手稿了. 很多人学习这套理论是从 Casselman 的一份未 (也许不会) 发表的笔记开始的 (introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, 很容易从网上下载). 下一步只有看 Harish Chandra 全集 (Springer 出版) 有关文集 (不包括他未发表的稿子). 还有一个小故事, A. Silberger 发表了 introduction to harmonic analysis on p-adic reductive groups, *Princeton University Lecture Notes*, 1979. 这原是 Harish Chandra 的讲稿. 不过 Harish Chandra 公开表示不满 Silberger 发表他的讲义. 这书的下场不言而喻了. 这类 p-进李群的表示的分类、L-packet 的结构、表示类的几何结构 (著名的 ABP 猜想) 以及 Local Langlands Correspondence (LLC) 是目前很活跃的领域. 建议看看 Aubert, Baum, Plamen, *C. R. Acad. Sci.* Paris, Ser. I, 2007，345: 573—578; DeBacker, Reeder, *Ann. of Math.* 2009, 169: 759—901; Reeder, An introduction to local Langlands *Correspondence*, 2012.

(II) 设 G 是 p-进李群. 要研究 G 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的 Banach 空间的表示. 这是全新的方向, 源自两个问题: (甲) p-adic Local Langlands Correspondence (参看 [Bre 10]; 及在 $GL(2)$ 时 [Col 08] 三册), (乙) noncommutative Iwasawa theory (看 Coates et.al., *Pub. Math.* 1 HES 101 (2005)). 这方面的表示论有两个人有很多文章. 一个是德国 Muenster 大学的 Peter Schneider, 另一个是美国 Chicago 大学的 Mathew Emerton.

习 题

1. 设紧群有酉表示 (π, V). 在 V 中找这样的子空间组 $\{V_\alpha\}$, 其中, 若 $\alpha \neq \beta$, 则 V_α 与 V_β 正交且 V_α 是 V 的有限维不变子空间. 用 Zorn 引理, 可知存在一个极大组. 设 U 为这一组子空间的和的闭包. 若存在 $0 \neq v \in U^\perp$, 取单位元开邻域 N, 记 N 的特征函数为 I_N. 证明 $\pi(I_N)v \in U^\perp$, 且存在 N 使得 $\pi(I_N)v \neq 0$. 用 Peter-Weyl 定理选取函数 h 是有限维不可约酉表示的矩阵系数的线性组合, 使得$\|I_N - h\|_1 \leqslant \|I_N - h\|_2 \leqslant \dfrac{I}{2}|\pi(I_N)v|/|v|$. 证明 $|\pi(h)v| \geqslant \dfrac{I}{2}|\pi(I_N)v| > 0$. 在 $L^2(G)$ 中取有限维左平移不变子空间 S, 使得 $h \in S$. 设 $h_1, \cdots, h_n$ 是 S 的基. 利用等式 $\pi(s)\pi(h)v = \displaystyle\int h(s^{-1})\pi(x)v dx$, 证明 $\Sigma\mathbb{C}_\pi(h_i)v$ 是 π 的有限维不变子空间, 这与 U 的定义相矛盾. 由此说明: 紧群的酉表示是有限维不可约不变子空间的正交和.

2. 设有复数 a, b, 使得对任意复数 λ, $\lambda a + \lambda b$ 都是实数. 证明 $\overline{a} = b$. 设 f 是 $*$ 代数的正泛函, 证明 $\overline{f(y^*x)} = f(x^*y)$ 和 $|f(y^*x)|^2 \leqslant f(x^*x)f(y^*y)$. 又设 f 是有单位元 e 的 $*$ Banach 代数的正泛函, 证明 f 是连续和 $\|f\| = f(e)$.

3. 设 $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$, $G = SU(1,1)$ 的元是

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix},\quad |a^2|+|b^2|=1\quad g(z)=\frac{az+\bar{b}}{bz+\bar{a}},\quad z\in\mathscr{D}.$$

设 $K=\{g\in G|g(0)=0\}=\left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}\middle| 0\leqslant\theta<2\pi\right\}$.

(i) 证明 G/K 与 $\mathscr{D}$ 同胚;

(ii) 若 $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 设 $\delta(g)=d$. 证明: 如果 $g(0)=z$, 则 $|\delta(g)|^2=\dfrac{I}{1-|z|^2}$;

(iii) 证明

$$\int_G|\delta(g)|^{2n}dg=\iint_{0\leqslant x^2+y^2<1}\frac{dxdy}{\left(1-x^2-y^2\right)^{n/2}}.$$

(iv) 设 $(\pi_n,\mathscr{H}_n)$ 是 G 的离散序列表示, $n<-1$. 在 $\mathscr{H}_n$ 中取元 φ_0, $\varphi_0(z)=1$, $\forall z$. 证明

$$(\varphi,\varphi_0)=-\frac{\pi}{n+1}\varphi(0),\quad \varphi\in\mathscr{H}_n,$$
$$(\pi_n(g)\varphi_0,\varphi_0)=-\frac{\pi}{n+1}d(g)^n,$$
$$\int_G|(\pi_n(g)\varphi_0,\varphi_0)|^2dg=\left(-\frac{\pi}{n+1}\right)^3;$$

(v) 证明: π_n 是二次可积, π_n 的形式次数是 $-\dfrac{n+1}{\pi}$.

4. 设 $G=SO(3)$, $K=SO(2)$, S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位圆.

(i) 证明 G/K 与 S^2 同胚. 设 P_n 是 n 次 Legendre 多项式, 即

$$P_n(\cos r)=\frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos r+i\sin r\cos u)^n du;$$

(ii) 以 o 记 (0, 0, 1), $p\in S^2$, $d(0,p)$ 表距离. 设

$$p(p)=P_n(\cos(d(o,p))).$$

证明: 球面调和函数 φ 满足函数方程:

$$\int_k\varphi(gkh)dk=\varphi(g)\varphi(h),\quad \forall g,h\in G.$$

5. 设 U_n 为 n 阶酉群, A_f 是标签为 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 的酉表示, 其中 f_i 是整数, 且 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n$. 以 $N(f)$ 表 A_f 的阶. 若对 $U=U_n$, 有

$$A_f(U)=\left(a_{ij}^f(U)\right),\quad 1\leqslant i,j\leqslant N(f),$$

则设

$$\varphi_{ij}^f(U)=\sqrt{\frac{N(f)}{C}}a_{ij}^f(U),$$

其中 $C=\int_{U_n}\dot{U}$ 是 U_n 的总体积.

(i) 证明 $\{\varphi_{i,j}^f\}$ 是法正交系, 并且 U_n 上任一连续函数可用 $\{\varphi_{ij}^f\}$ 的线性组合逼近.

设

$$\varPhi_f(U)=\left(\varphi_{ij}^f(U)\right),\quad 1\leqslant i,j\leqslant N(f),\ U\in U_n.$$

对 U_n 上可积函数 u, 设

$$C_f(u)=\int_{U_n}u(V)\varPhi_f(V)\dot{V}.$$

则 u 的 Fourier 级数是

$$\sum_f \mathrm{tr}(C_f(u)\varPhi_f(U)^t),$$

其中 tr 是迹, t 表转置, 这个级数的 Abel 平均是

$$\sum_f \rho^f(r)\mathrm{tr}(C_f(u)\varPhi_f(U)^t),$$

其中

$$\rho^f(r)=\frac{I}{C}\int_{U_n}\frac{\left(1-r^2\right)^{n^2}}{|\det\left(1-rV\right)|^{2n}}\frac{\mathrm{tr}A_f(V)}{N(f)}\dot{V};$$

(ii) 证明酉群上的连续函数的 Fourier 级数必 Abel 收敛于它自身 (华罗庚 [29], 5.12, 龚昇 [38], 1.3).

6. 设 $V_0=\mathbb{C}$ 是 $SU(2)$ 的平凡表示, V_n 由以 z_1,z_2 为变元的次数为 n 的齐次多项式组成, 它以 $\{P_k(z_1,z_2)=z_1^kz_2^{n-k}|0\leqslant k\leqslant n\}$ 为基. $\dim V_n=n+1$. 设 $P\in V_n$, $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SU(2)$, $z=(z_1,z_2)$, $zg=(az_1+cz_2,bz_1+dz_2)$. 则

(i) 证明以下公式定义 $SU(2)$ 在 V_n 上的表示:

$$(gP)(z)=P(zg).$$

对 $a\in U(1)$, 取 $g_a=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}$. 对 $\theta\in\mathbb{R}$, 设

$$k_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}.$$

(ii) 如果 V_n 的自同态 A 与 $SU(2)$ 的作用交换, 则 $g_a AP_k = a^{2k-n}AP_k$, 所以存在 $c_k \in \mathbb{C}$. 令 $AP_k = c_k P_k$ 及 $k_\theta AP_n = \sum_k \binom{u}{k} \cos^k\theta \sin^{n-k}\theta c_k P_k$. 所以 $A = C_n \cdot i_d$. 证明: V_n 是 $SU(2)$ 的不可约表示.

(iii) 设

$$e(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix},$$

$\mathscr{F}$={连续 $f : SU(2) \to \mathbb{C} | \forall g \in GL(2,\mathbb{C})$, $f\big(gxg^{-1}\big) = f(x)$ 对所有 $x \in SU(2)$ 均成立}. 证明: V_n 的特征标 χ_n 在 $e(t)$ 取值为 $\sum_{k=0}^{n} e^{i(n-2k)t}$, 所以, $\{\chi_n\}$ 在 $\mathscr{F}$ 内一致稠密;

(iv) 利用特征标的正交关系证明: $SU(2)$ 的任意一个不可约酉表示必同构于一个 V_n;

(v) 证明 Clebsch-Gordan 公式:

$$V_k \bigotimes V_I = \bigotimes_{j=0}^{q} V_{k+l-2j}, \quad q = \min(k,l).$$

7. G 是紧拓扑群. 在 $L = L^2(G)$ 上, 取 G 的右正则表示 ρ.

(i) 设 V 是 L 的有限维不变子空间. 取 $f \in V$, 证明存在 $A \in \mathrm{End}V$, 使得对 $x \in G$ 有 $f(x) = \mathrm{tr}(A\rho(x))$;

(ii) 设 (π, V_π) 是 G 的有限维不可约表示. 对 $A \in \mathrm{End}V_\pi$, 设 $T_A(x) = \mathrm{tr}(A\pi(x))$. 证明 T 的像集是 L 内与 π 等价的表示的直和, 并且 $T : \mathrm{End}V_\pi \to \mathrm{Im}T$ 是 G-同构;

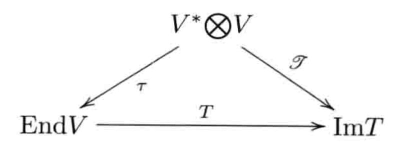
(iii) 证明: L 是代数直和 $\bigoplus_\pi V_\pi^* \bigotimes V_\pi$(其中 $\bigoplus_\pi$ 是对所有不可约表示求和) 的闭包 (在 V 内取基 $\{e_i\}$, 则以下互逆映射:

$$\mathrm{End}V \to V^* \bigotimes V, \quad A \mapsto \sum_i e_i^* \bigotimes Ae_i,$$

$$V^* \bigotimes V \to \mathrm{End}V, \quad u \bigotimes v \mapsto (w \mapsto u(w)v),$$

定义同构 $\tau : V^* \bigotimes V \cong \mathrm{End}V$);

(iv) 对 $u \in V^*$, $v \in V = V_x$, $x \in G$, 取 $\mathscr{T}_{u \bigotimes v}(x) = u(\pi \times (x)v)$. 证明下图交换:



(v) 在 $V^* \bigotimes V$ 上定义 $G \times G$ 的表示 $\pi^* \times \pi$ 如下:

$$\pi^* \times \pi(x,y)\,(u \bigotimes v) = \pi^*(x)u \bigotimes \pi(y)v.$$

在 $\mathrm{Im}T$ 上取 $G \times G$ 的表示:

$$(\lambda \times \rho)(x, y)(f)(z) = f\big(x^{-1}zy\big).$$

利用关系

$$\mathscr{T}_{\pi^*(x)u \otimes v}(y) = \lambda(x)\mathscr{T}_{u \otimes v}(y),$$
$$\mathscr{T}_{u \otimes \pi(x)v}(y) = \rho(x)\mathscr{T}_{u \otimes v}(y),$$

证明: $\pi^* \times \pi$ 与 $\lambda \times \rho$ 等价.

第5章　齐性空间

设 G 为拓扑群, X 为 (非空) 拓扑空间, $\alpha: G \times X \to X$ 为连续映射. 我们说 G 作用在 X 上 (G acts on X), 如果有

(1) $\alpha(1_G, x) = x,\ x \in X,\ 1_G$ 为 G 的单位元;

(2) $\alpha(h, \alpha(g, x)) = \alpha(hg, x),\ h, g \in G,\ x \in X$, 若还满足条件: 对任二元 $x, y \in X$ 存在 $g \in G$ 使得 $y = \alpha(g, x)$, 则称 X 为齐性空间.

对函数 $f: X \to \mathbb{C},\ g \in G$, 定义函数 $\rho(g)f: X \to \mathbb{C}$ 如下:

$$\rho(g)f(x) := f(\alpha(g, x)).$$

现设有线性拓扑空间 V, 其元素为 X 上的复值函数 $f: X \to \mathbb{C}$. 假定若 $f \in V$ 则对所有 $g \in G$, $\rho(g)f \in V$. 如果 $\rho: G \times V \to V: (g, f) \mapsto \rho(g)f$ 是连续, 则 ρ 便是 G 在 V 上的表示, 常称此为 (左) 正则表示. 问题是: ρ 的谱分解是怎样的? 怎样把包含在 ρ 内的不可约 G 表示分类?

最常见的情形是: G 是李群, H 是 G 的闭子群, $X = G/H$ (商空间). V 是 Banach 空间 $L^p(G/H)$, $0 < p \leqslant \infty$, 或是 Sobolev 空间 $W^p(G/H)$. 以上的问题是调和分析的基本问题, 也是现代工程数学的基本问题.

设 G 是连通半单实李群, K 是 G 的板大紧子群, 关于 G/K 的调和分析有丰富的成果, 见 [Hel 08], [GV 88].

设 G 是概约实李群, H 是 G 的一个对合的定点子群. 关于 G/H 的调和分析的研究是比较晚的, 见 [Fle 86], [DSV 05]. 可以说关于 G/H 的不变微分算子的成果较少, 可参看 [Zg 01].

一般来说, 关于 L^2 的结果比较多. 关于一般的 L^p 的结果就不知了. 另一方面, 如果假设 G/H 是紧空间, 类似龚昇 [Kun 83] 那种精准的 Fourier 级数收敛结果未见.

用 G/H 上的微分方程理论的观点, 考虑 V 是一组微分方程的解空间. 这就是 D-模的观点 (见 [HTT 08]). 用 D-模理论研究 G/H 的调和分析好像还未系统地做.

本章先介绍两个成功的例子. 设 Γ 是 G 的离散子群. 考虑 G 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上的正则表示. 两种情形是: $\Gamma\backslash G$ 是紧空间或是赋有有限测度的非紧空间. 然后在第 5.3 节, 5.4 节谈谈流形上微分方程整体理论.

齐性空间的上同调群是体现李群表示的几何方法. 这个方法在李群表示论或自守形式论都非常重要. 这个方法的第一个标准情形便是体现紧李群表示的 Borel-

Weil-Bott 定理 (见 [Jan 03], [Kna 01]Chap V§7, [Bot 57]). 当李群是非紧时有著名的 Schmid 定理 ([Sch 71])、L^2 上同调论 ([SS 90])、intersection cohomology([Lus 90]). 这些及其日后的发展都在本书范围之外了.

5.1 紧齐性空间

设 G 是幺模局部紧拓扑群, Γ 是 G 的闭离散子群, 使得商空间 $\Gamma\backslash G$ 是紧空间, 而且 $\Gamma\backslash G$ 有唯一的左 G 不变正则 Borel 测度. 关于这个测度的二次可积 (或称平方可积) 函数全体记为 $L^2(\Gamma\backslash G)$.

对 $x \in G$, $\varphi \in L^2(\Gamma\backslash G)$, 设

$$\rho(x)\varphi(s) = \varphi(sx), \quad s \in \Gamma\backslash G.$$

容易证明, $\rho : G \times L^2(\Gamma\backslash G) \to L^2(\Gamma\backslash G)$ 是酉表示.

当 $\Gamma = \{1\}$ 时, 以上的假设等价于 G 是紧群, ρ 是 G 的右正则表示.

引理 5.1.1 设 $f \in C_c(G)$, 用公式

$$(\rho(f)\varphi, \psi) = \int_G f(x)(\rho(x)\varphi, \psi)dx$$

定义的 $\rho(f)$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的紧算子.

证明 (1) 设 $f \in L^1(G)$, $\varphi \in L^2(\Gamma\backslash G)$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\backslash G}\left(\int_G |\varphi(sx)f(x)|dx\right)^2 ds &\leqslant \int_{\Gamma\backslash G}\left(\int_G |\varphi(sx)|^2|f(x)|dx\right)\left(\int_G |f(x)|dx\right) ds \\
&= \left(\int_G |f(x)|dx\right)\int_G |f(x)|\left\{\int_{\Gamma\backslash G}|\varphi(sx)|^2 ds\right\}dx \\
&= \left(\int_G |f(x)|dx\right)^2 \int_{\Gamma\backslash G}|\varphi(s)|^2 ds < \infty.
\end{aligned}$$

所以, 对几乎所有 s, 积分

$$\int_G \varphi(sx)f(x)dx$$

是有意义的, 而且它定义了一个在 $\Gamma\backslash G$ 上的二次可积函数. 另一方面,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma\backslash G}\left[\int_G \varphi(sx)f(x)dx\right]\psi(s)ds &= \int_G f(x)\left\{\int_{\Gamma\backslash G}\varphi(sx)\overline{\psi(s)}ds\right\}dx \\
&= \int_G f(x)(\rho(x)\varphi, \psi)dx = (\rho(f)\varphi, \psi).
\end{aligned}$$

可见

$$\rho(f)\varphi(s) = \int_G f(x)\varphi(sx)dx.$$

(2) 设 $f \in C_c(G)$, 则存在常数 M, 使得 $\forall x, y \in G$, 有不等式

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \left| f\left(x^{-1}\gamma y\right) \right| \leqslant M.$$

事实上, 只要取紧子集 C 使得 $G = \Gamma C$, 然后对 $x, y \in C$, 证明所求的不等式即可. 设 $C' = \mathrm{supp}(f)$, $B = CC'C^{-1}$, 则 $\gamma \notin B \bigcap \Gamma \Rightarrow f\left(x^{-1}\gamma y\right) = 0$. 但 $B \bigcap \Gamma$ 是离散紧集, 所以它只有有限个元. 设 $N = \sharp(B \bigcap \Gamma)$, 则

$$\sum_{\Gamma} \left| f\left(x^{-1}\gamma y\right) \right| \leqslant N \sup_{s\in G} |f(s)| = M.$$

(3) 设 $f \in C_c(G)$, $x_0 \in G$ 和 $\delta > 0$, 则存在单位元邻域 U, 使得对 $x \in U$, $y \in G$ 有

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \left| f\left(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y\right) - f\left(x_0^{-1}\gamma y\right) \right| < \delta.$$

此不等式可证明如下. 取紧子集 C, 使得 $G = \Gamma \cdot C$. 设 $C' = \mathrm{supp} f$. 取 G 的单位元的紧邻域 V, 可以假设 $y \in C$, 则由 $\gamma \notin x_0VC'C^{-1} \bigcap \Gamma$, 可得

$$\left| f\left(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y\right) - f\left(x_0^{-1}\gamma y\right) \right| = 0.$$

设 N 表示集合 $x_0VC'C^{-1} \bigcap \Gamma$ 中元素个数, 取单位元邻域 $U \subseteq V$, 则

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \left| f\left(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y\right) - f\left(x_0^{-1}\gamma y\right) \right| \leqslant N \sup_{\substack{x\in U\\ y\in G}} \left| f\left(x^{-1}y\right) - f(y) \right|.$$

可取 U 充分小, 使得

$$\sup_{\substack{x\in U\\ y\in G}} \left| f\left(x^{-1}y\right) - f(y) \right| < \frac{\delta}{N}.$$

就得到所求的不等式.

(4) 要证明当 $f \in C_c(G)$ 时, $\rho(f)$ 是紧算子, 只需证明: 若有 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中序列 $\{\varphi_n\}$, $\|\varphi_n\| \leqslant 1(\forall n)$, 则序列 $\|\rho(f)\varphi_n\|$ 有收敛子列. 如果我们能证明下面两点, 则可以用 Ascoli 定理得到上面结论:

(i) $\|\varphi\| \leqslant 1 \Rightarrow \left| \int_G f(y)\varphi(xy)dy \right| < \infty$, $\forall x \in G$;

(ii) $\rho(f)\varphi$ 是连续函数且 $\{\rho(f)\varphi \mid \|\varphi\| \leqslant 1\}$ 同等连续.

其中 $\varphi \in L^2(\Gamma \setminus G)$.

现在我们来证明这两点. 由于

$$\int_G f(y)\varphi(xy)dy = \int_G f\left(x^{-1}y\right)\varphi(y)dy = \int_{\Gamma\backslash G}\left[\sum_\Gamma f\left(x^{-1}\gamma y\right)\right]\varphi(y)dy,$$

所以

$$\left|\int_G f(y)\varphi(xy)dy\right| \leqslant \left(\int_{\Gamma\backslash G}|\varphi(y)|^2dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma\backslash G}\left(\sum_\Gamma\left|f\left(x^{-1}\gamma y\right)\right|^2dy\right)^{1/2}.$$

由此不等式及 (2) 可得 (i). 下面证 (ii).

对 $x_0\in G$, $\varepsilon>0$, 设 $|\Gamma\backslash G|$ 是 $\Gamma\backslash G$ 的测度, $\delta<\varepsilon/\sqrt{|\Gamma\backslash G|}$, 对此 δ 取 U 如 (3), 则对 $\|\varphi\|\leqslant 1$, $x\in U$, 有

$$\begin{aligned}
&\left|\int_G f(y)\varphi(x_0xy)dy - \int_G f(y)\varphi(x_0y)dy\right| \\
=&\left|\int_{\Gamma\backslash G}\varphi(y)\sum_{\gamma\in\Gamma}\left[f\left(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y\right)-f\left(x_0^{-1}\gamma y\right)\right]dy\right| \\
\leqslant&\left(\int_{\Gamma\backslash G}|\varphi(y)|^2dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma\backslash G}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}\left|f\left(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y\right)-f\left(x_0^{-1}\gamma y\right)\right|\right)^2dy\right)^{1/2} \\
<&\ \varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了 (ii).

引理 5.1.2 设局部紧群 G 有酉表示 (π,H), 使得对任意单位元邻域 U, 存在可积函数 f 满足以下条件: (1) $\mathrm{supp}(f)\subset U$, (2) $\int_G fdx=1$, (3) $\pi(f)$ 是紧算子. 则

(1) H 有闭不变子空间 H_0, 使得 (π,H_0) 是不可约.

(2) H 有一组闭不变子空间 $\{H_\alpha\}$ 满足以下条件:

(i) (π,H_α) 是不可约的;

(ii) $\alpha\neq\beta\Rightarrow H_\alpha$ 与 H_β 正交;

(iii) $H=\bigoplus H_\alpha$;

(iv) G 的任何不可约表示只在 π 中出现有限多次.

证明 (1) 取 $u\in H$, $\|u\|=1$, 单位元邻域 U, 使得 $x\in U\Rightarrow\|\pi(x)u-u\|<1/2$.

对 U 选取 f 满足假设 (1), (2), (3), 这样, 如果 $\|v\|=1$, 则

$$\begin{aligned}|(\pi(f)u-u,v)| &= \left|\int_G f(x)(\pi(x)u,v)dx-(u,v)\right| \\ &= \left|\int_G f(x)[(\pi(x)u,v)-(u,v)]dx\right| \\ &= \left|\int_U f(x)(\pi(x)u-u,v)dx\right| \\ &\leqslant \|\pi(x)u-u\|\|v\|\int_U f(x)dx \leqslant \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

因此 $\|\pi(f)u-u\| \leqslant \dfrac{1}{2}$. 又因为 $\pi(f)u \neq 0$, 所以 $\pi(f) \neq 0$. $\pi(f)$ 的共轭算子 $\pi(f)^*$ 也是紧算子, 所以 $\pi(f)+\pi(f)^*$ 和 $-i(\pi(f)-\pi(f)^*)$ 都是自共轭紧算子. 设 $f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}$, 则 $\pi(f)^*=\pi(f^*)$. 两个算子 $\pi(f+f^*)$, $\pi(if^*-f)$ 之中必有一个非零. 以 A 记这个非零算子, 设 λ 为 A 的非零特征根. $H_\lambda=\{u\in H|Au=\lambda u\}$. 则 $\dim H_\lambda<\infty$. 在 H 内考虑一组非零子空间

$$\{H_\lambda\bigcap H'|H'\text{是 } H \text{ 的闭子空间, 且 } \pi(G)H'\subset H'\},$$

在其中取最小元 H_1. 设

$$H_0=\bigcap\{H'|H'\supset H_1, H'\text{是闭的 } \pi(G) \text{ 不变子空间}\}.$$

如果 (π,H_0) 可约, 设 $H_0=L_1\bigoplus L_2$, 其中 L_1,L_2 是互相垂直的非零的 $\pi(G)$ 不变子空间. 所以 L_1,L_2 亦在 A 的作用下不变, 考虑

$$H_1=(H_1\bigcap L_1)\bigoplus(H_1\bigcap L_2).$$

由 H_1 的选取可知 $H_1\bigcap L_i=0$ 或 H_1, $i=1,2$. 必有 i, 使 $H_1\bigcap L_i=H_1$, 即 $L_i\supset H_1$, 所以 $L_i\supset H_0$, 这与 $H_0=L_1\bigoplus L_2$, $L_i\neq\{0\}$ 矛盾.

(2) 设 $\{H_\alpha\}$ 是一组最大的互相正交的闭不变子空间, (π,H_α) 是不可约酉表示. 设 $H'=\bigoplus H_\alpha$. 如果 $H\neq H'$, 取 H' 为 H' 在 H 的正交补, 则 $H''\neq 0$, 而且 (π,H'') 同样满足引理的假设. 可以用 (1) 得到不可约不变子空间 H_0, 而且 H_0 与 H' 正交, 这与 H' 的定义矛盾. 最后证 (iv). 给出不可约酉表示 (σ,V). 设有无限个 α, 使得 (π,H_α) 与 (σ,V) 等价. 可选取 f 使 $\sigma(f+f^*)$, $\sigma(i(f^*-f))$ 之一有非零特征根 μ. V 中以 μ 为特征根的特征向量生成 V_μ. 以 $T_\alpha:V\to H_\alpha$ 记 π,α 的缠结算子, 选取 A 如 (1), 并设

$$H_\mu=\{v\in H|Av=\mu v\},$$

则 $\bigoplus T_\alpha V_\mu\subset H_\mu$. 这与 $\dim H_\mu<\infty$ 相矛盾. □

下面定理可立刻从以上两引理推出.

定理 5.1.1 设 Γ, G 满足如上假设, 则有正交分解 $L^2(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_{\pi\in G} m_\pi L_\pi$, 其中 $0 \leqslant m_\pi < \infty$, $m_\pi L_\pi$ 是 m_π 个 L_π 的直和, (ρ, L_π) 与不可约酉表示 π 等价.

下面我们研究怎样计算 m_π.

命题 5.1.1 设 (π, H) 是 G 的二次可积表示, 并有长度为 1 的向量 $u \in H$ 和 $h \in C_c(G)$, 使得

(i) $\int_G |(\pi(x)u, u)|dx < \infty$,

(ii) $\pi(h)u = u$.

设 $\xi(x) = d_x(\pi(x)u, u)$, $K(x, y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi\left(x^{-1}\gamma y\right)$, $L^2(\Gamma\backslash G) = L_0 \bigoplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m_\pi} L_i\right)$, 其中 $L_0 = \sum_{\pi'\neq\pi} m_{\pi'} L_{\pi'}$, (ρ, L_i) 与 (π, H) 等价. 则

(1) 设 C 为 G 的紧子集, 对 $x, y \in C$, 级数 $\sum_{\gamma\in\Gamma} \left|\xi\left(x^{-1}\gamma y\right)\right|$ 一致收敛.

(2) $K(x, y)$ 是连续函数.

(3) 若 ρ 是右正则表示, $\varphi \in L^2(\Gamma\backslash G)$, 则

$$\rho(\xi)\varphi(x) = \int_{\Gamma\backslash G} K(x, y)\varphi(y)dy,$$

$\rho(\xi)$ 的迹是

$$\operatorname{tr}\rho(\xi) = \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma\in\Gamma} \xi\left(x^{-1}\gamma x\right) dx.$$

(4) $\rho(\xi)|_{L_0} = 0$.

(5) $\rho(\xi)|_{L_i}$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 到 $\mathbb{C}T_i u$ 的投射, 这里 $T_i : H \to L_i$ 是 (ρ, L_i) 与 (π, H) 的缠结算子.

(6) 设 $\{\varphi_i | 1 \leqslant i \leqslant m_\pi\}$ 是 $\rho(\xi)\left(L^2(\Gamma\backslash G)\right)$ 的法正交基, 则 $K(x, y) = \sum_{i=1}^{m_\pi} \varphi_i(x) \times \overline{\varphi_i(y)}$.

(7) $G_\gamma = \{x \in G | x\gamma x^{-1} = \gamma\}$ 是 γ 在 G 的中心化子, Γ_γ 是 γ 在 Γ 中的中心化子. 以 $|\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma|$ 记 $\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma$ 的测度, $\sum_{\{\gamma\}}$ 表示对 Γ 的共轭类求和. 则

$$m_\pi = \operatorname{tr}\rho(\xi) = \sum_{\{\gamma\}} |\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma| \int_{G_\gamma\backslash G} \xi\left(x^{-1}\gamma x\right) dx.$$

证明 (1) 只需证明对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 Γ 的子集 S, 使得

$$\sum_{\Gamma - S} \left|\xi\left(x^{-1}\gamma y\right)\right| < \varepsilon$$

对一切 $x, y \in C$ 都成立. 对假设给出的 $h \in C_c(G)$, 选取 M, 使得 $\forall x, y \in G$, 有

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \left| h\left(x^{-1}\gamma y\right)\right| < M.$$

设 $C_2 = \mathrm{supp}(h)$. 取紧子集 C_1, 使得 $\displaystyle\int_{G-C_1} |\xi(x)|dx < \varepsilon/M$. 这时, 从 $\pi(h)u = u$, 得

$$\begin{aligned}\xi(x) = d_\pi \overline{(\pi(x)u, u)} &= d_\pi \int_G \overline{h(s)(\pi(xs)u, u)} ds \\ &= \int_G \overline{h(s)} \xi(xs) ds = \int_G \overline{h\left(x^{-1}s\right)} \xi(s) ds.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\xi\left(x^{-1}\gamma y\right)\right| &\leqslant \int_G \left|h\left(y^{-1}\gamma^{-1}xs\right)\right| |\xi(s)| ds \\ &= \left(\int_{C_1} + \int_{G-C_1}\right) \left|h\left(y^{-1}\gamma^{-1}xs\right)\right| |\xi(s)| ds.\end{aligned}$$

如果存在 $x_0, y_0 \in C$, 使在 C_1 上积分不为 0, 则存在 $s_0 \in C_1$, 使 $y_0^{-1}\gamma^{-1}x_0 s_0 \in C_2$, 于是

$$\gamma^{-1} \in y_0 C_2 s_0^{-1} x_0^{-1} \subseteq C C_2 C_1^{-1} C^{-1} \bigcap \Gamma,$$

后者是有限集, 因此存在有限集 S, 使得

$$\sum_{\Gamma - S} \left|\xi\left(x^{-1}\gamma y\right)\right| \leqslant \int_{G-C_1} \sum_{\gamma \in \Gamma} \left|h\left(y^{-1}\gamma^{-1}xs\right)\right| |\xi(s)| ds \leqslant M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon.$$

(2) 是 (1) 的直接推论.

(3) 作计算如下

$$\begin{aligned}\rho(\xi)\varphi(x) &= \int_G \xi(y)\varphi(xy)dy = \int_G \xi\left(x^{-1}y\right)\varphi(y)dy \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \xi\left(x^{-1}\gamma y\right)\right) \varphi(y)dy = \int_{\Gamma\backslash G} K(x, y)\varphi(y)dy.\end{aligned}$$

为了进一步证明, 我们需要几个引理.

引理 5.1.3 如果 $f \in L^1(G)$, 则 $\rho(f)$ 是 Hilbert-Schmidt 算子 (Sakai [Sak 71], p.35).

证明 设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的法正交基. 我们有

$$\sum_{i,j=1}^N |(\rho(f)\varphi_i, \varphi_j)| = \sum_{i,j=1}^N \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} |K(xy)| \varphi_i(y) \varphi_j(x) dy dx,$$

并且 $\{\varphi_i(y)\varphi_j(x)\}$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G\times\Gamma\backslash G)$ 的法正交集. 据 Bessel 不等式可得

$$\sum_{i,j=1}^{N}|\rho(f)\varphi_i,\varphi_j|^2\leqslant\int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G}|K(x,y)|^2dxdy.$$

因此

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|(\rho(f)\varphi_i,\varphi_j)|^2<\infty. \qquad \square$$

系理 5.1.1 如果 $f_1,f_2\in L^1(G)$, $f=f_1*f_2$, 则 $\rho(f)=\rho(f_1)\rho(f_2)$ 是迹类算子 (Sakai [Sak 71], p.36). $\square$

引理 5.1.4 如果 X 是 σ-有限测度空间, $K_1(x,y)$, $K_2(x,y)$ 是 $X\times X$ 上的可测函数, 使得

$$\int_{X\times X}|K_i(x,y)|^2dxsy<\infty,\quad i=1,2.$$

对 $\varphi\in L^2(X)$, 设

$$T_i\varphi(x)=\int_Y K_i(x,y)\varphi(y)dy,\quad i=1,2.$$

则 $T_i=L^2(X)\to L^2(X)$ 是 Hilbert-Schmidt 算子, 并且

$$\mathrm{tr}(T_1T_2)=\int_X\int_X K_1(y,x)K_2(x,y)dxdy.$$

证明 对几乎所有 x 可以定义积分

$$\int_X K_i(x,y)\varphi(y)dy,$$

而且用 Hölder 不等式, 有

$$\begin{aligned}\int_X\left|\int_X K_i(x,y)\varphi(y)dy\right|^2dx&\leqslant\int_X\left\{\int_X|K_i(x,y)|^2dy\right\}\left\{\int_X|\varphi(y)|^2dy\right\}dx\\&\leqslant\left\{\int_X\int_X|K_i(x,y)|^2dxdy\right\}\left\{\int_X|\varphi(y)|^2dy\right\}.\end{aligned}$$

所以 T_i 是 $L^2(X)$ 上的有界算子. 同前面引理一样, 可以证明 T_i 是 Hilbert-Schmidt 算子. 显然

$$T_i^*\varphi(x)=\int_X\overline{K_i(y,x)}\varphi(y)dy.$$

在 $L^2(X)$ 中取法正交基 $\{\varphi_i\}$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(T_1T_2)&=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}(T_2\varphi_i,T_1^*\varphi_i)\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_X\left[\int_X K_2(x,y)\varphi_i(y)dy\right]\times\overline{\left[\int_X\overline{K_1(y,x)}\varphi_i(y)dy\right]}dx.\end{aligned}$$

对几乎所有 x, 有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_X K_2(x,y)\varphi_i(y)dy\right\}\left\{\int_X K_1(y,x)\overline{\varphi_i(y)}dy\right\}=\int_X K_2(x,y)K_1(y,x)dy.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_X K_2(x,y)\varphi_i(y)dy\right\}\left\{\int_X K_1(y,x)\overline{\varphi_i(y)}dy\right\}\right|\\ \leqslant&\left\{\sum_{i=1}^{N}\left|\int_X K_2(x,y)\varphi_i(y)dy\right|^2\right\}^{1/2}\times\left\{\sum_{i=1}^{N}\left|\int_X K_1(y,x)\varphi_i(y)dy\right|^2\right\}^{1/2}\\ \leqslant&\left\{\int_X |K_2(x,y)|^2dy\right\}^{1/2}\left\{\int_X |K_1(y,x)|^2dy\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

用 Schwarz 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\int_X\left\{\int_X |K_2(x,y)|^2dy\right\}^{1/2}\left\{\int_X |K_1(y,x)|^2dy\right\}^{1/2}dx\\ \leqslant&\left\{\int_{X\times X}|K_2(x,y)|^2dxdy\right\}^{1/2}\left\{\int_{X\times X}|K_1(y,x)|^2dxdy\right\}^{1/2}<\infty.\end{aligned}$$

所以, 应用控制收敛定理得到

$$\mathrm{tr}(T_1T_2)=\int_X\int_X K_2(x,y)K_1(y,x)dydx.$$ □

系理 5.1.2 设 $f=f_1*f_2$, 则

$$\mathrm{tr}\rho(f)=\int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\Gamma}f\left(x^{-1}\gamma x\right)dx.$$

证明 设

$$\rho(f_1)\varphi(x)=\int_{\Gamma\backslash G}K_1(x,y)\varphi(y)dy,$$
$$\rho(f_2)\varphi(x)=\int_{\Gamma\backslash G}K_2(x,y)\varphi(y)dy.$$

则

$$\rho(f)\varphi(x)=\int_{\Gamma\backslash G}K(x,y)\varphi(y)dy,$$

其中

$$K(x,y)=\sum_{\gamma}f\left(x^{-1}\gamma y\right)=\int_{\Gamma\backslash G}K_1(x,s)K_2(s,y)ds.$$

从引理 5.1.4 得出该系理. □

现在我们证明 $\xi * \xi = \xi$, 用 Schur 正交关系计算

$$\begin{aligned} d_\pi^2 \int_G (\pi(y)u, u)(\pi\left(y^{-1}x\right)u, u)dy &= d_\pi^2 \int_G (\pi(y)u, u)\overline{(\pi(y)u, \pi(x)u)}dy \\ &= d_\pi(u,u)(\pi(x)u,u) = d_\pi(\pi(x)u,u). \end{aligned}$$

这样结合系理 5.1.2, 我们就得到命题 5.1.1 的 (3). 下面继续证明命题 5.1.1.

(4) 设 $\varphi, \psi \in L_0$, $\rho_0 = \rho|_{L_0}$, 则用 Schur 正交关系知

$$(\rho(\xi)\varphi, \psi) = \int_G \xi(y)(\rho(y)\varphi, \psi)dy = d_\pi \int_G (\rho_0(y)\varphi, \psi)\overline{(\pi(y)u, u)}dy = 0,$$

所以 $\rho(\xi)$ 与 L_0 的元正交, 即 $\rho(\xi)|_{L_0} = 0$.

(5) 只需证明 $\pi(\xi)$ 是 H 到 H 的子空间 $\mathbb{C}u$ 的投射, 取 $v, w \in H$, 则

$$(\pi(\xi)w, v) = d_\pi \int_G \overline{(\pi(x)u, u)}(\pi(x)w, v)dx = (w, u)(u, v).$$

所以 $\pi(\xi)w = (w, u)u$.

(6) 因为 $K(x, y)$ 连续, 所以可以设 φ_i 是连续的. 但是, 如果两个有连续核的积分算子相等, 则这两个算子的核相等. 故

$$\sum_{i=1}^{m_\pi} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} = K(x, y).$$

(7) 作计算

$$\begin{aligned} m_\pi &= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{i=1}^{m_\pi} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(x)}dx = \int_{\Gamma\backslash G} \sum_\gamma \xi\left(x^{-1}\gamma x\right)dx \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\{\gamma\}} \sum_{\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} \xi\left(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x\right)dx \left(\Gamma = \sum_{\{\gamma\}} \Gamma_\gamma\backslash\Gamma\right) \\ &= \sum_{\{\gamma\}} |\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma| \int_{G_\gamma\backslash G} \xi\left(x^{-1}\gamma x\right)dx. \end{aligned}$$

□

例 5.1.1　Γ 是 $G = SU(1,1)$ 的离散子群, 使得 $\Gamma\backslash G$ 是紧空间, π_n 是 G 的离散序列表示 (4.1.4 小节).

$$\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

称 $\mathscr{D}$ 上的解析函数为权 n 的模形式, 如果 $\forall\gamma\in\Gamma$, 有 $\pi_n(\gamma)\phi=\phi$, 即对 $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}\in\Gamma$, 有

$$(bz+d)^n\phi\left(\frac{az+c}{bz+d}\right)=\phi(z),\quad \forall z\in\mathscr{D}.$$

5.2 算术商的谱分解

这里所谓算术商是指商空间 $SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})$.

本节讨论 $L^2(SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R}))$ 的右正则表示的谱分解. 读者可以把本章看作一个长的例子. 以 ${}^0L^2$ 表尖形式所生成的子空间 (见下面 5.2.1 小节), 以 $({}^0L^2)^\perp$ 表示 ${}^0L^2$ 的正交补, 则在 ${}^0L^2$ 上有如 Peter-Weyl 定理的结果, 即 ${}^0L^2$ 可以分解为不可约子空间的直和, 而 $({}^0L^2)^\perp$ 则可以表达为 Eisenstein 级数的连续和.

本章中, $G=SL(2,\mathbb{R})$, $\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$, $K=SO(2)$, $N=\left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big| x\in\mathbb{R}\right\}$, $A=\left\{\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}\Big| y\in\mathbb{R}^*\right\}$. 在 G 上固定 Haar 测度 dg, 在 Γ 取 Haar 测度, 使得每点测度是 1, 在 $\Gamma\backslash G$ 上取 G 不变测度.

5.2.1 尖形式

称以下的群为尖性子群

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\Big| x\in\mathbb{R}\right\},\quad \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}N\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}\Big| x\in\mathbb{Q}\right\}.$$

定义 5.2.1 考虑由 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上满足下列条件的有界连续函数 f 生成的子空间

$$\int_{\Gamma\bigcap N_1\backslash N_1} f(ng)dn=0,$$

其中 N_1 为任一与 N 共轭的子群, g 为 G 中任意一个元素. 记这子空间的闭包为 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$, 其中的元素称为尖形式.

G 可看作 $\mathbb{R}^4$ 的闭子流形 $\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4,\ ad=bc=1\}$, 所以, G 上有无穷可微函数. 记 G 上有紧支集的无穷可微函数的全体为 $C_c^\infty(G)$. 取

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in G,$$

$$z\in\mathfrak{h}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}|y>0\}.$$

定义

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

则有同胚

$$G/K \to \mathfrak{h} : gK \mapsto g(i).$$

另一方面, 有同胚

$$NA \to \mathfrak{h} : \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} \mapsto x + iy^2.$$

于是有 Iwasawa 分解: $G = NAK$. 对任意 $g \in G$, 有 $g = n(g)a(g)k(g)$, 其中 $n(g) \in N$, $a(g) \in A$, $k(g) \in K$. 如果 $a(g) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}$, 则设 $\rho(a(g)) = y$.

设

$$\begin{aligned}
\mathscr{D} &= \left\{ z \in \mathfrak{h} \middle| -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(z) \leqslant \frac{1}{2}, |z| \geqslant 1 \right\} \\
&\quad \bigcup \left\{ z \in \mathfrak{h} \middle| |z| = 1, 0 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant \frac{1}{2} \right\}, \\
N\left(\frac{1}{2}\right) &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \right\}, \\
A(t) &= \left\{ \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} \middle| y^2 \geqslant t \right\}, \\
\mathfrak{S} &= N\left(\frac{1}{2}\right) A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) K.
\end{aligned}$$

因为有双射 $\Gamma/\mathfrak{h} \to \mathscr{D}$, 所以 $G = \Gamma\mathfrak{S}$. 若 Q 是 N 的紧子集, 则设 $\mathfrak{S}(Q,t) = QA(t)K$(称为 Siegel 集). 从公式

$$\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y^2 x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

可知, $a \in A \Rightarrow aQa^{-1}$ 是 N 的紧子集, 故 $g \in \mathfrak{S}(Q,t)$, 即 $g^{-1}a(g)$ 属于紧集 $\left(a(g)^{-1}Qa(g)K\right)^{-1}$. 同理, 如果已给 $g' \in \mathfrak{S}(Q,t)$ 及 A 的紧子集 Q_A, 则 $g' \in Qa(g)Q_AK$. 于是, $a(g)^{-1}g'$ 属于紧集.

函数 $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ 的 Fourier 变换是

$$\hat{\varphi}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i x y} dx.$$

引理 5.2.1 用 $f \in C_c^\infty(G)$ 定义 $\hat{f}_{g,g'}(x) = f\left(g^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g'\right)$, 其中 $x \in \mathbb{R}$, $g, g' \in G$. 给定 N 的紧子集 Q, A 的紧子集 Q_A, 则对任何正整数 m, 存在常数 C, 使得若 $g \in \mathfrak{S}(Q,t)$, $g' \in Qa(g)Q_AK$, 就有

$$|\hat{f}_{g,g'}(y)| \leqslant C\rho\left(a(g)\right)^{2(1-m)} |y|^{-m}.$$

证明 作计算

$$\begin{aligned}\hat{f}_{g,g'}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(g^{-1}\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}g'\right)e^{-2\pi ixy}dx\\&= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(g^{-1}a(g)\begin{pmatrix}1 & \rho(a(g))^{-2}x\\0 & 1\end{pmatrix}a(g)^{-1}g'\right)e^{-2\pi ixy}dx\\&= \rho(a(g))^{2}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(g^{-1}a(g)\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}a(g)^{-1}g'\right)\times e^{-2\pi ix\rho(a(g))^{2}y}dx.\end{aligned}$$

因为 $g^{-1}a(g)$ 及 $a(g)^{-1}g'$ 分别属于紧集, 而 f 有紧支集, 所以用分部积分 m 次便有

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} f\left(g^{-1}a(g)\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}a(g)^{-1}g'\right)e^{-2\pi ix\rho(a(g))^{2}y}dx\\&= (2\pi i\rho(a(g))^{2}y)^{-m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^m}{dx^m}f\left(g^{-1}a(g)\times\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}a(g)^{-1}g'\right)e^{-2\pi ix\rho(a(g))^{2}y}dx.\end{aligned}$$

□

定理 5.2.1 已给 $\varphi\in C_c^{\infty}(G)$. 存在常数 C_φ, 使得如果 $f\in^0 L^2(\Gamma\backslash G)$, 则

$$\sup_{g\in G}\left|\int_G f(gg')\varphi(g')dg'\right|\leqslant C_\varphi\|f\|_2.$$

证明 首先,

$$\int_G f(gg')\varphi(g')dg' = \int_G f(g')\varphi\left(g^{-1}g'\right)dg' = \int_{\Gamma_N\backslash G}\sum_{n\in\Gamma_N}\varphi\left(g^{-1}ng'\right)f(ng')dg',$$

其中 $\Gamma_N = N\bigcap\Gamma = \left\{\begin{pmatrix}1 & m\\0 & 1\end{pmatrix}\middle| m\in\mathbb{Z}\right\}$. 对 $x\in\mathbb{R}$, 设

$$\varphi_{g,g'}(x) = \varphi\left(g^{-1}\begin{pmatrix}1 & x\\0 & 1\end{pmatrix}g'\right).$$

用 Poisson 求和公式

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\varphi_{g,g'}(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}_{g,g'}(m),$$

其中有 Fourier 变换

$$\hat{\varphi}_{g,g'}(m) = \int_{\mathbb{R}}\varphi_{g,g'}(x)e^{-2\pi ixm}dx.$$

设

$$K_\varphi(g,g') = \sum_{n\in\Gamma_N}\varphi\left(g^{-1}ng'\right).$$

则

$$K_\varphi(g,g') = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_{g,g'}(m),$$

而且

$$\int_G f(gg')\varphi(g')dg' = \int_{\Gamma_N\backslash G} K_\varphi(gg')f(g')dg'.$$

计算

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_N\backslash G} \hat{\varphi}_{g,g'}(0)f(g')dg' &= \int_{\Gamma_N\backslash G}\int_N \varphi\left(g^{-1}ng'\right) f(g')dndg' \\ &= \int_{N\backslash G}\int_{\Gamma_N\backslash N}\int_N \varphi\left(g^{-1}nn'g'\right) f(n'g')dndn'dg' \\ &= \int_{N\backslash G}\left\{\int_N \varphi\left(g^{-1}ng'\right)dn \cdot \int_{\Gamma_N\backslash N} f(n'g)dn'\right\}dg = 0.\end{aligned}$$

这是因为 $f \in^0 L^2(\Gamma\backslash G)$.

因为 $G = \Gamma\mathfrak{S}$, f 在 $\Gamma\backslash G$ 上定义, 故只需对 $g \in \mathfrak{S} = N\left(\frac{1}{2}\right)A \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 作估值. 因为 $G = \Gamma_N N\left(\frac{1}{2}\right)AK$, 所以可设 $g' \in N\left(\frac{1}{2}\right)AK$. 设 Q 是 φ 的支集, 从 K_φ 的定义知只需考虑 g', 使得有 $n \in \Gamma_N$, $g^{-1}ng' \in Q$. 因为 $g^{-1}a(g)$ 属于紧集, 所以从公式

$$g^{-1}ng' = \left(g^{-1}a(g)\right)\left(a(g)^{-1}nn(g')a(g)\right)\left(a(g)^{-1}a(g')k(g')\right),$$

知存在 A 的紧子集 Q_A, 使得 $g' \in N\left(\frac{1}{2}\right)a(g)Q_AK$.

由引理 5.2.1, 可知存在 G 的紧子集 Q_G, 使以下不等式成立:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_N\backslash G}\sum_{m\neq 0}\hat{\varphi}_{g,g'}(m)f(g')dg'\right| &\leqslant C_1\int_{\substack{\Gamma_N\backslash G\\ g'\in a(g)Q_G}}\left(\sum_{m\neq 0}\frac{1}{|m|^l}\right)\rho(a(g))^{2(1-l)}|f(g')|dg' \\ &\leqslant C_2\rho(a(g))^{2(1-l)}\int_{\substack{\Gamma_N\backslash G\\ g'\in a(g)Q_G}}|f(g')|dg' \\ &\leqslant C_2\rho(a(g))^{2(1-l)}|a(g)Q_G|\|f\|_2,\end{aligned}$$

其中 $|a(g)Q_G|$ 是 $a(g)Q_G$ 的测度, C_1, C_2 为常数, $l > 1$. □

引理 5.2.2 设局部紧拓扑空间 X 有有限正测度, $B(X)$ 是 X 的有限连续函数的全体, H 是 $L^2(X)$ 的闭子空间, $T: H \to B(X)$ 是线性映射, 而且存在常数 $C > 0$, 使得若 $f \in H$, 就有 $\sup\limits_{x\in X}|Tf(x)| \leqslant C\|f\|_2$, 则 $T: H \to L^2(X)$ 是紧算子.

证明 由假设中的不等式知, 有 $k_x \in H$, 使得对 $f \in H$, 有

$$Tf(x) = \langle f, k_x \rangle.$$

因为 $x \mapsto k_x$ 是弱连续, 所以它是弱可测, 于是 $x \mapsto \langle k_x, k_x \rangle$ 是可测. 用 Schwartz 不等式, 可知

$$h \mapsto \int_X \int_X h(x,y)\overline{k_x(y)}dydx$$

是 L^2 连续. 所以存在 $k \in L^2(X \times X)$, 使得对几乎所有 x, 存在测度为 0 的 S_x, 当 $y \notin S_x$ 时, 有

$$k_x(y) = k(x,y).$$

设 $\{\varphi_i\}$ 是 $L^2(X)$ 的法正交基. 则由 Fubini 定理可知 $\{\varphi_i\varphi_j\}$ 是 $L^2(X \times X)$ 的法正交基. 设

$$k = \Sigma a_{ij}\varphi_i\varphi_j, \quad k_n = \sum_{i,j<n} a_{ij}\varphi_i\varphi_j.$$

则算子 K_n:

$$f \mapsto \int_X f(y)k_n(x,y)dy$$

的像是有限维的. 因为 $|K_n - K| \leqslant \|k_n - k\|_2 \to 0$, 所以 T 是紧算子. □

设 π 是 G 的正则表示, 则由定理 5.2.1 和引理 5.2.2 可知, $\pi(\varphi)$ 是 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$ 的紧算子. 所以有 Peter-Weyl 定理.

引理 5.2.3 设非零代数 $\mathfrak{A}$ 的元素是 Hilbert 空间 H 的紧算子, 而且 $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$. 则 H 有互相正交的不可约子空间 H_i, 使得 H 是 $\{H_i\}$ 的代数直和的闭包, 而且固定 H_i, 只存在有限个 H_j 与 H_i 等价.

证明 (1) 先证明 H 有 $\mathfrak{A}$ 不可约子空间, 如果 $A \in \mathfrak{A}$, 则

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i\frac{A - A^*}{2i}.$$

所以存在 $0 \neq A^* = A \in \mathfrak{A}$. 设 $0 \neq \lambda$ 是 A 的特征根, H_λ 是对应的特征空间. 取 H 的 $\mathfrak{A}$ 不变子空间 H', 使得 $\dim(H_\lambda \bigcap H')$ 最小. 取 $0 \neq v \in H_\lambda \bigcap H'$, $\mathfrak{A}v$ 的闭包记为 H_0. 若 $L \neq \{0\}$ 是 H_0 的 $\mathfrak{A}$ 不变子空间, 设 $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in L$, v_2 与 L 正交, 则 $v_1, v_2 \in H_\lambda$. 如果 v_1, v_2 皆不为 0, 则 $\dim(H_\lambda \bigcap L) < \dim(H_\lambda \bigcap H')$, 矛盾. 如 $v_2 = 0$, 则 $H_0 = L$. 因此, H_0 是不可约子空间.

(2) 设 $\{H_i\}$ 是最大的一组互相正交的 $\mathfrak{A}$ 不可约不变子空间, H'' 是 H_i 所生成的闭子空间的正交补, 则 H'' 同样满足引理的假设. 由 (1) 可知 H'' 有不可约 $\mathfrak{A}$ 不变子空间 H_0, 矛盾. □

设 π 是作用在 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$ 上的右平移. 对 $\mathfrak{A}=\{\pi(\varphi)|\varphi\in C_c^\infty(G)\}$ 应用定理 5.2.1, 引理 5.2.2 及 5.2.3, 则得到以下定理.

定理 5.2.2 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$ 有对右正则表示不可约子空间 ${}^0L^2(n)$, 使得若固定 n, 只有有限个 m 使 ${}^0L^2(m)$ 与 ${}^0L^2(n)$ 等价, 而且有正交分解

$$ {}^0L^2(\Gamma\backslash G)=\bigoplus_n {}^0L^2(n). $$

5.2.2 Eisenstein 级数

从公式

$$(0,1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(c,d),$$

得双射 $N\backslash G\to\mathbb{R}^2\setminus\{0,0\}:N_g\mapsto(0,1)g$.

以 $\mathscr{S}_2$ 记 $\mathbb{R}^2$ 的 Schwartz 空间 [1]. 记由函数

$$N_g\mapsto f((0,1)g),\quad f\in\mathscr{S}_2$$

所组成的空间为 $\mathscr{S}(N\backslash G)$.

记正实数为 $\mathbb{R}^+$, 利用同构

$$A\to\mathbb{R}^+:a_y=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}\mapsto y$$

得到 A 的 Haar 测度

$$\int_A f(a_y)da_y=\int_0^\infty f(y)\frac{dy}{y}.$$

引理 5.2.4 设 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$, $\mathrm{Re}\ s>0$, 则积分

$$Z(\varphi,s,g)=\int_0^\infty\varphi(a_y,g)y^{-s-1}\frac{dy}{y},\quad g\in G$$

绝对收敛. 如果同时 φ 有紧支集, 则积分所定义 s 的函数是整函数.

证明 因为

$$\begin{aligned} &Z(\varphi,s,ng)=Z(\varphi,s,g),\quad n\in N,\\ &Z(\varphi,s,ag)=\rho(a)^{s+1}Z(\varphi,s,g),\quad a\in A,\quad \rho(a_y)=y, \end{aligned}$$

所以只需考虑 $Z(\varphi,s,k)$, $k=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 由 φ 的定义可知

$$\varphi(a_yk)=\varphi((0,1)a_yk)=\varphi\left(-y^{-1}\sin\theta,y^{-1}\cos\theta\right).$$

1) 这即是说 $\mathscr{S}_2$ 中的元是 $\mathbb{R}^2$ 的速降函数. 参看 [Rud 91], 7.3; 或张恭庆的《泛函分析讲义》, 第三章, 3.2.7(179 页); 或岩村联的《广义函数》, 28(134 页).

由 Shwartz 空间的定义知, 存在充分大的

$$\sqrt{(-y\sin\theta)^2+(y\cos\theta)^2}=y,$$

函数 $|\varphi(-y\sin\theta, y\cos\theta)|y^r$ 有界, 所以, 对 $s=r+it$,

$$\begin{aligned}|Z(\varphi,s,k)| &\leqslant \int_0^{\infty}\left|\varphi\left(-y^{-1}\sin\theta, y^{-1}\cos\theta\right)y^{-s-1}\right|\frac{dy}{y}\\ &=\int_0^{\infty}|\varphi(-y\sin\theta, y\cos\theta)|y^{r+1}\frac{dy}{y}<\infty.\end{aligned}$$

如果 φ 有紧支集, 则

$$\frac{d^m}{ds^m}Z(\varphi,s,g)=(-1)^m\int_0^{\infty}\varphi(a_y,g)y^{-s-1}(\log y)^m\frac{dy}{y}.$$ □

定义 5.2.2 称 $Z(\varphi,s,g)$ 为 φ 的 ζ- 变换.

引理 5.2.5 设 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$, Re $s>0$. 令

$$\Phi(s,g)=\rho(a(g))^{-s-1}Z(\varphi,s,g).$$

则

$$\varphi(g)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}s=r}\rho(a(g))^{s+1}\Phi(s,g)|ds|.$$

证明 首先 $\int_{\mathrm{Re}s=r}|ds|$ 是指 $\int_{\mathrm{Re}s=r}\frac{ds}{i}$. 证明的其余部分是 Paley-Wiener 空间上的 Mellin 变换的反演. 设 $f(y)=\varphi((0,y)g), g\in G$. 又设

$$Mf(s)=\int_0^{\infty}f(y)y^s\cdot\frac{dy}{y},$$

$s=r+it$, $y=e^x$, $F_r(x)=f\left(e^{-x}\right)e^{-rx}$, $\hat{F}_r$ 是 F_r 的 Fourier 变换, 则 $Mf(s)=\hat{F}_r\left(\frac{t}{2\pi}\right)$. 作计算

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}s=t}Mf(s)y^{-s}\frac{ds}{i}=e^{-rx}\hat{\hat{F}}_r(x)=f(y).$$

然后用 $Mf(s+1)=Z(f,s,g)$ 和 $\varphi(g)=f(1)$, 即可. □

定理 5.2.3 如果 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$, $\varphi(g)=\varphi(-g)$, Re $s>1$, 则级数

$$\sum_{\gamma\in\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}Z(\varphi,s,\gamma g)$$

绝对收敛.

证明　只需考虑 $g=1$ 的情形. 因为

$$\pm\Gamma_N=\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|m\in\mathbb{Z}\right\},$$

所以

$$\pm\Gamma_N\begin{pmatrix}* & *\\ c & d\end{pmatrix}=\pm\Gamma_N\begin{pmatrix}* & *\\ c' & d'\end{pmatrix}$$

的充要条件是 $(c,d)=\pm(c',d')$, 设 $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma$, 则 c,d 互素. 又因 $\varphi((0,1)a_y\gamma)=\varphi\left(\frac{c}{y},\frac{d}{y}\right)$, 所以,

$$\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}Z(\varphi,s,\gamma)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{c,d\ \text{互素}\\ c>0\\ m\leqslant c^2+d^2<m+1}}\int_0^{\infty}\varphi(cy,dy)y^{s+1}\frac{dy}{y}.$$

因为 φ 属于 Schwartz 空间, 所以存在常数 C, 使得若 $|(x_1,x_2)|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}>C$, 则

$$|\varphi(x_1,x_2)|\ll|(x_1,x_2)|^{-r-1-s},$$

其中 $r=\mathrm{Re}\ s$. 因此有

$$\int_0^{\frac{c}{m}}|\varphi(cy,dy)|y^{r+1}\frac{dy}{y}\ll\int_0^{\frac{c}{m}}y^r dy\ll m^{-r-1},$$

及

$$\int_{\frac{c}{m}}^{\infty}|\varphi(cy,dy)|y^{r+1}\frac{dy}{y}\ll\int_{\frac{c}{m}}^{\infty}\frac{y^r dy}{|(cy,dy)|^{r+1+\varepsilon}}\ll m^{-r-1-\varepsilon}\int_{\frac{c}{m}}^{\infty}y^{-1-\varepsilon}dy\ll m^{-r-1}.$$

注意到 Gauss 的结论: 半径为 m 的圆内有 $O(m^2)$ 个整点, 所以

$$\sum_{\substack{c,d\ \text{互素}\\ c>0\\ m\leqslant c^2+d^2<m+1}}1\ll m.$$

于是立刻可得

$$\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}|Z(\varphi,s,\gamma)|\ll\Sigma m^{-r}.$$

□

定义 5.2.3　设 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$, $s\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\ s>1$, $g\in G$, $\Phi(s,g)=\rho(a(g))^{-s-1}\cdot Z(\varphi,s,g)$. 称

$$E(\Phi,s,g)=\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}\rho(a(\gamma g))^{s+1}\Phi(s,\gamma g)$$

为 Eisenstein 级数.

例 5.2.1 设

$$k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

在同构

$$G/K \to \mathfrak{h}, \quad gK \mapsto g(i) = z$$

下, 如果

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \\ & (\sqrt{y})^{-1} \end{pmatrix} k_\theta,$$

则 $z = x + iy$. 设

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \gamma g = \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y'} & \\ & (\sqrt{y'})^{-1} \end{pmatrix} k_{\theta'},$$

则

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} = x + iy'.$$

又设 $j(\gamma, z) = cz + d$, 取 $f \in C_c^\infty((0,\infty))$ 及 $s \in \mathbb{C}$, 使得

$$0 \neq D = \int_0^\infty f(y) y^{-s-1} \frac{dy}{y} < \infty.$$

如果

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} k_\theta,$$

则设 $\varphi(g) = f(y) e^{ik\theta}$, 其中 k 为正偶整数. 这样

$$\Phi(g, s) = \rho(a(g))^{-s-1} \int_A \varphi(ag) \rho(a)^{-s-1} da.$$

设

$$E_k(z, s) = \left(\sqrt{y} e^{i\theta}\right)^{-k} D^{-1} E(g, \Phi, s),$$

其中

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} k_\theta, \quad z = x + iy.$$

则容易算出

$$E_k(z, s) = (\mathrm{I_m} z)^{(s+1-k)/2} \sum_{\pm\Gamma \bigcap N \backslash \Gamma} |j(\gamma z)|^{-(s+1-k)} j(\gamma, z)^{-k}.$$

于是

$$E_k(z,k-1)=\sum_{\substack{m>0\\(m,n)=1}}(mz+n)^{-k},$$

$$E_0(z,2s-1)=\sum_{\pm\Gamma\bigcap N\backslash\Gamma}\mathrm{Im}(\gamma(z))^s.$$

上述例子说明定义 5.2.3 中的 Eisenstein 级数, 同时处理了各个不同权的 Eisenstein 级数及实解析 Eisenstein 级数.

定理 5.2.4 设 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$, $\varphi(g)=\varphi(-g)$, $\hat{\varphi}$ 是 φ 的 Fourier 变换. $\varphi(0)=\hat{\varphi}(0)=0$, $\hat{\Phi}(s,g)=\rho(a(g))^{-s-1}Z(\hat{\varphi},s,g)$, $\xi(s)$ 是 Riemann ζ-函数, 则 $\zeta(s+1)E(\Phi,s,g)$ 是 s 的整函数, 并且有函数方程

$$E(\Phi,s,g)=\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(1+s)}E\left(\check{\Phi},-s,\ {}^tg^{-1}\right).$$

证明 从定义得

$$E(\Phi,s,g)=\frac{1}{2}\sum_{(m_1,m_2)=1}\int_0^\infty\varphi((m_1,m_2)yg)y^{s+1}\frac{dy}{y}.$$

于是

$$\begin{aligned}\zeta(1+s)E(\Phi,s,g)&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(m_1,m_2)=1}\int_0^\infty\varphi((m_1,m_2)yg)\left(\frac{y}{n}\right)^{s+1}\frac{dy}{y}\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2}\varphi((m_1m_2)yg)y^{s+1}\frac{dy}{y}.\end{aligned}$$

因为函数 $(x_1,x_2)\mapsto\varphi((x_1,x_2)yg)$ 的 Fourier 变换是函数

$$(x_1,x_2)\mapsto\hat{\varphi}((x_1,x_2)y^{-1}({}^tg^{-1}))^{-2},$$

用 Poisson 求和公式便得

$$\begin{aligned}&\int_0^1\sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2}\varphi((m_1,m_2)yg)y^{s+1}\frac{dy}{y}\\=&\int_0^1\sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2}\hat{\varphi}\left((m_1,m_2)y^{-1}\left({}^tg^{-1}\right)\right)y^{s-1}\frac{dy}{y}\\=&\int_1^\infty\sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2}\hat{\varphi}\left((m_1,m_2)y\left({}^tg^{-1}\right)\right)y^{1-s}\frac{dy}{y}.\end{aligned}$$

所以

$$\zeta(1+s)E(\Phi,s,g) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \sum_{(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2} \Big\{\varphi((m_1,m_2)yg)y^{s+1} + \hat{\varphi}\left((m_1,m_2)y\left({}^tg^{-1}\right)\right)y^{1-s}\Big\}\frac{dy}{y}$$

是 s 的整函数. 因为 φ 是偶函数, 故 $\hat{\hat{\varphi}} = \varphi$. 这样上面的积分在变换 $(\varphi,s,g) \to (\hat{\varphi},-s,\ {}^tg^{-1})$ 之下不变. 因此, 有

$$\zeta(1+s)E(\Phi,s,g) = \zeta(1-s)E(\check{\Phi},-s,\ {}^tg^{-1}). \qquad \square$$

5.2.3 连续谱

如果对 $\Gamma\backslash G$ 上的函数 f, 下列积分

$$f_N(g) = \int_{\Gamma_N\backslash N} f(ng)dn$$

有意义, 则 f_N 称为 f 的常数项. 如果对 $\pm N\backslash G$ 上的函数 φ, 级数

$$\Theta_\varphi(g) = \sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma} \varphi(\gamma_g)$$

收敛, 则 Θ_φ 称为 φ 的 θ 级数.

引理 5.2.6 设 $f \in L^2(\Gamma\backslash G)$, $\varphi \in C_c(\pm N\backslash G)$, 则

$$\langle\Theta_\varphi, f\rangle_{\Gamma\backslash G} = \langle\varphi, f_N\rangle_{\pm N\backslash G},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ 是表 $L^2(*)$ 上内积.

证明

$$\begin{aligned}\langle\Theta_\varphi, f\rangle &= \int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}\varphi(\gamma_g)\overline{f(g)}dg = \int_{\pm\Gamma_N\backslash G}\varphi(g)\overline{f(g)}dg \\ &= \int_{\pm N\backslash G}\int_{\Gamma_N\backslash N}\varphi(ng)\overline{f(ng)}dndg \\ &= \int_{\pm N\backslash G}\varphi(g)f_N(g)dg = \langle\varphi, f_N\rangle_{\pm N\backslash G}.\end{aligned} \qquad \square$$

设 $f \in L^2(\Gamma\backslash G)$. 如果对所有的 $\varphi \in C_c(\pm N\backslash G)$, f 与 Θ_φ 正交, 则 $f \in {}^0L^2(\Gamma\backslash G)$. 设 L 是 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的正交补, 则 θ 级数所生成的子空间的闭包是 L. 对偶函数 $\varphi \in \mathscr{S}(N\backslash G)$, 有

$$\Theta_\varphi(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}s=r} E(\Phi,s,g)|ds|.$$

这样, L 便可看作 Eisenstein 级数的 "连续和"(直积分). 进一步研究 L 便要知道 $\langle\Theta_\varphi, \Theta_\varphi\rangle_{\Gamma\backslash G}$. 从引理 5.2.6 可知需要进一步计算常数项.

定理 5.2.5 设 $\varphi \in \mathscr{S}(N\backslash G)$, $\varphi(g) = \varphi(-g)$, m 为整数,

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right) = \varphi(y)e^{im\theta},$$

ζ 是 Riemann ζ 函数, $\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\zeta(s)$,

$$\mathbb{M}_m(s) = (-1)^{m/2}\frac{(s-1)(s-3)\cdots(s-(m-1))}{(s+m-1)(s+m-3)\cdots(s+1)} \times \frac{\xi(s)}{\xi(1+s)},$$

则 Eisenstein 级数的常数项是

$$E_N(\Phi, s, g) = \rho(a(g))^{s+1}\Phi(s,g) + \rho(a(g))^{-s-1}\mathbb{M}_m(s)\Phi(s,g),$$

且 $\mathbb{M}_m(s)\mathbb{M}_m(-s) = 1$.

证明 简记 $Z(\varphi, s, g)$ 为 $Z(g)$, 则

$$E(\Phi, s, g) = \sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma} Z(\gamma g).$$

于是,

$$E_N(\Phi, s, g) = \int_{\Gamma_N\backslash N}\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma} Z(\gamma n g)dn.$$

易证 Γ 有双陪集分解

$$\Gamma = \bigcup_{\gamma\in\pm\Gamma_N\backslash\Gamma/\Gamma_N}(\pm\Gamma_N)\gamma\Gamma_N = \pm\Gamma_N \bigcup\left(\bigcup_{\substack{c>0\\ d \bmod c\\ (c,d)=1\\ m\in\mathbb{Z}}}(\pm\Gamma_N)\begin{pmatrix}* & *\\ c & d\end{pmatrix}\tau^m\right), \quad \tau = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由此可得

$$\begin{aligned}
E_N(\Phi, s, g) &= \int_{\Gamma_N\backslash N}\sum_{\gamma\in\pm\Gamma_N\backslash\Gamma/\Gamma_N}\sum_{m\in\mathbb{Z}} Z\left(\gamma\tau^m n g\right)dn\\
&= \left(\sum_{1\neq\gamma\in\pm\Gamma_N\backslash\Gamma/\Gamma_N}\int_{\Gamma_N\backslash N}\sum_{m\in\mathbb{Z}} Z\left(\gamma\tau^m n g\right)dn\right) + \int_{\Gamma_N\backslash N} Z(ng)dn\\
&= \sum_{1\neq\gamma\in\pm\Gamma_N\backslash\Gamma/\Gamma_N}\int_N Z(\gamma n g)dn + Z(g)\int_{\Gamma_N\backslash N} dn.
\end{aligned}$$

设 $w=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, G 有 Bruhat 分解

$$G=\pm NA\bigcup\pm NAwN.$$

从公式

$$\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&0\\0&y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x'\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*&*\\-y^{-1}&*\end{pmatrix}$$

可得: 如果 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in MNAwN$, 则

$$MN\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}N=MNa_{c^{-1}}wN.$$

于是, 若 $1\neq\gamma=\begin{pmatrix}*&*\\c&d\end{pmatrix}$, $c>0$, 则

$$\pm N\gamma N=\pm Na_{c^{-1}}wN.$$

所以

$$E_N(\Phi,s,g)=Z(g)+\sum_{\substack{c>0\\ d\bmod c\\ (c,d)=1}}\int_N Z(a_{c^{-1}}wng)dn.$$

现在来计算积分

$$\begin{aligned}\int_N Z(a_{c^{-1}}wng)dn&=\int_N\int_0^\infty\varphi(a_ya_{c^{-1}}wng)y^{-s-1}\frac{dy}{y}dn\\&=c^{-s-1}\int_N\int_0^\infty\varphi(a_ywng)y^{-s-1}\frac{dy}{y}dn\\&=c^{-s-1}\int_N\rho(a(wng))^{s+1}\Phi(wng)dn.\end{aligned}$$

公式

$$wng=wnn(g)a(g)k(g)=\left(wa(g)w^{-1}\right)\left(wa(g)^{-1}n\cdot n(g)a(g)k(g)\right),$$

设 $n=a(g)^{-1}n\cdot n(g)a(g)$, 则

$$\begin{aligned}\int_N\rho(a(wng))^{s+1}\Phi(wng)dn&=\rho(a(g))^{-s-1}\int_N\rho(a(wn'k(g)))^{s+1}\Phi(wn'k(g))dn\\&=\rho(a(g))^{-s+1}\int_N\rho(a(wnk(g)))^{s+1}\Phi(wnk(g))dn\\&=\rho(a(g))^{-s+1}\int_N Z(wnk(g))dn.\end{aligned}$$

按照 Iwasawa 分解, 有

$$\begin{pmatrix} p & q \\ t & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

所以

$$\frac{q+ip}{r+it} = x+iy^2, \quad r+it = \left(ye^{i\theta}\right)^{-1}.$$

从

$$-wn_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix},$$

得

$$-wn_x = a_{|x+i|^{-1}} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta = \arg(x+i).$$

设 $k(g) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$, 从 Z 的定义, 得

$$Z(wn_x k(g)) = |x+i|^{-(s+1)} e^{im(\psi-\theta)} Z(1) = \left(1+x^2\right)^{-\frac{s+1}{2}} e^{-im\theta} \rho(a(g))^{-s-1} Z(g).$$

于是

$$\int_N Z(wnk(g))dn = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-im\theta}}{(1+x^2)^{\frac{s+1}{2}}} dx\right) \rho(a(g))^{-s-1} Z(g).$$

设 $x = \mathrm{ctg}\theta$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-im\theta} \left(1+x^2\right)^{-\frac{s+1}{2}} dx &= \int_0^{\infty} (\sin\theta)^{s-1} e^{-im\theta} d\theta \\ &= \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2)}{\Gamma((s+1-m)/2)\Gamma((s+1+m)/2)}. \end{aligned}$$

综上所述, 有

$$\begin{aligned} &\int_N Z(a_{c^{-1}} wng) dn \\ &= c^{-s-1} \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2)}{\Gamma((s+1-m)/2)\Gamma(s/2)\Gamma((s+1+m)/2)} \times \rho(a(g))^{-s+1} \Phi(s,g). \end{aligned}$$

利用公式

$$\sum_{\substack{c>1 \\ d \bmod c \\ (c,d)=1}} \frac{1}{c^{s+1}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)},$$

我们立刻得到所求公式. 从函数方程 $\xi(s) = \xi(1-s)$ 可得

$$\mathbb{M}_m(s)\mathbb{M}_m(-s) = 1.$$ □

通过直接计算可证明 $\rho(a)^{-2}dnda$ 是 NA 上的 Haar 测度, 按 Iwasawa 分解 $G=NAK$, 对应的 Haar 测度分解为

$$\int_G f(g)dn=\int_K\int_A\int_N f(nak)\rho(a)^{-2}dndadk.$$

现在可以证明 θ 级数的内积公式

定理 5.2.6 设有偶函数 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$. 令

$$\varphi(g)=\varphi(y)e^{im\theta},\quad \psi(g)=\psi(y)e^{im\theta},$$
$$g=\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&0\\0&y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},$$

其中 m 为偶函数, 则对充分大的 r, 有

$$\langle\Theta_\varphi,\Theta_\psi\rangle_{\Gamma\backslash G}=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}\,s=r}\{\langle\Phi(s,\cdot),\Psi(-\overline{s},\cdot)\rangle_K+\langle\mathbb{M}_m(s)\Phi(s,\cdot),\Psi(\overline{s},\cdot)\rangle_K\}|ds|.$$

证明 若 $\gamma\in\pm\Gamma_N$, 则 $\Theta_\varphi(\gamma_g)=\Theta_\varphi(g)$. 这样

$$\begin{aligned}\langle\Theta_\varphi,\Theta_\psi\rangle_{\Gamma\backslash G}&=\int_{\Gamma\backslash G}\Theta_\varphi(g)\overline{\Theta_\psi}(g)dg\\&=\int_{\Gamma\backslash G}\Theta_\varphi(g)\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}\overline{\psi}(\gamma g)dg\\&=\int_{\pm\Gamma_N\backslash G}\Theta_\varphi(g)\overline{\psi}(g)dg\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}s=r}\left\{\int_{\pm\Gamma_N\backslash G}E(\Phi,s,g)\overline{\psi}(g)dg\right\}|ds|.\end{aligned}$$

继续计算, 令 $g=nak$, 则

$$\begin{aligned}&\int_{\pm\Gamma_N\backslash G}E(\Phi,s,g)\overline{\psi}(g)dg\\=&\int_{\pm\Gamma_N\backslash\pm ANK}E(\Phi,s,g)\overline{\psi}(g)\rho(a(g))^{-2}dndadk\\=&\int_K\int_A\int_{\Gamma_N\backslash N}E(\Phi,s,nak)\overline{\psi}(nak)\rho(a)^{-2}dndadk\\=&\int_K\int_A E_N(\Phi,s,ak)\overline{\psi}(ak)\rho(a)^{-2}dadk\\=&\int_K\int_A\{\rho(a)^{s+1}\Phi(s,k)+\rho(a)^{-s+1}\mathbb{M}_m(s)\Phi(s,k)\}\times\overline{\psi}(ak)\rho(a)^{-2}dadk.\end{aligned}$$

因为

$$\int_A \rho(a)^{s-1}\overline{\psi}(ak)da = \overline{Z}(\psi, -\overline{s}, k) = \overline{\Psi}(-\overline{s}, k),$$

$$\int_A \rho(a)^{-s-1}\overline{\psi}(ak)da = \overline{\Psi}(\overline{s}, k),$$

并注意到

$$\langle \Phi(s), \Psi(-\overline{s})\rangle_K = \int_K \psi(s,k)\overline{\Psi}(-\overline{s},k)dk,$$

我们就得到所求公式. □

设 m 为偶整数, 并设

$$\mathscr{S}(N\backslash G)_m = \Big\{\varphi \in \mathscr{S}(N\backslash G) | \varphi(g) = \varphi(-g),$$
$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right) = \varphi(y)e^{im\theta}\Big\}.$$

以 $L(m)$ 记 $\{\Theta_\varphi | \varphi \in \mathscr{S}(N\backslash G)_m\}$ 所生成的闭子空间. 设有 $f \in L^2(\Gamma\backslash G)$, f 与 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G) \oplus \left(\bigoplus_m L(m)\right)$ 正交. 以 H 记包含 f 的最小不变子空间. 称 $h \in H$ 为 K 有限, 如果 $h = \sum_{i=1}^{l} a_i h_i$, $a_i \in C$, 而且有 $m_i \in \mathbb{Z}$, 使得

$$h_i\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right) = h_i(y)e^{im_i\theta}.$$

因为 $-1 \in \Gamma$, 所以 m_i 是偶整数. 因为 K 与单位圆同构, 圆上的二次可积偶函数的 Fourier 展开是 $\Sigma a_i e^{im_i\theta}$, m_i 是偶整数, 所以 H 的 K 有限元组成 H 的稠密子集. 但从内积公式可见与 $L(m)$ 正交的 K 有限函数必为零, 因此 $H = \{0\}$, $f = 0$. 所以

$$L^2(\Gamma\backslash G) = {}^0L^2(\Gamma\backslash G) \oplus L,$$

$${}^0L^2(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_n {}^0L^2(n),$$

$$L = \bigoplus_m L(m).$$

若 $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(N\backslash G)_m$, 则

$$\Phi(s,k) = \int_0^\infty \varphi(a,k)y^{-s-1}\frac{dy}{y} = e^{im\theta}\Phi(s,1),$$

$$k = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

所以

$$\langle \Phi(s,\cdot), \Psi(-\overline{s},\cdot)\rangle_K = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\overline{e^{im\theta}}d\theta\right)(\Phi(s,1))(\overline{\Psi}(-\overline{s},1))$$
$$= \Phi(s,1)\overline{\Psi}(-\overline{s},1).$$

于是, 我们把 θ 级数的内积公式写成

$$\langle \Theta_\varphi, \Theta_\psi\rangle_{\Gamma\backslash G} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}s=r}\{\Phi(s,1)\overline{\Psi}(-\overline{s},1) + \mathbb{M}_m(s)\Phi(s,1)\overline{\Psi}(\overline{s},1)\}|ds|.$$

从 $\mathbb{M}_m$ 的公式可见在右复平面 $\mathrm{Re}s>0$ 中 $\mathbb{M}_m$ 的唯一奇点是 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 的单极. 以 γ_m 记 $\mathbb{M}_m$ 在 $s=1$ 的残数, 则

$$\gamma_m = (-1)^{\frac{m}{2}}\left(\Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)\xi(2)\right)^{-1}.$$

当我们把 θ 级数的内积公式中积分路线 $\mathrm{Re}s=r$ 移至 $\mathrm{Re}s=0$ 时, 会增加残数一项, 即

$$\langle \Theta_\varphi, \Theta_\psi\rangle_{\Gamma\backslash G} = \gamma_m\Phi(1,1)\overline{\Psi}(1,1)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}s=0}\{\Phi(s,1)\overline{\Psi}(-\zeta,1) + \mathbb{M}_m(s)\Phi(s,1)\overline{\Psi}(\overline{s},1)\}ds.$$

因此可作直和分解: $L(m) = L_0(m)\oplus L_1(m)$, 其中 $L_0(m)$ 是常数 (函数). Θ_φ 与 Θ_ψ 在 $L_0(m)$ 的投影的内积是 $\gamma_m\Phi(1,1)\overline{\Psi}(1,1)$. 利用 $\mathbb{M}_m(s)\mathbb{M}_m(-s)=1$, 可得 Θ_φ 与 Θ_ψ 在 $L_1(m)$ 的投影的内积是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\{\Phi(iy,1)+\mathbb{M}_m(-iy)\Phi(-iy,1)\}\cdot\frac{1}{2}\{\Psi(iy,1)+\mathbb{M}_m(-iy)\Psi(-iy,1)\}dy.$$

设 $Y(m) = \left\{f\middle|\int_{-\infty}^{\infty}|f(iy)|^2dy<\infty, f(-iy)=\mathbb{M}_m(iy)f(iy)\right\}$, 则 $L_1(m)$ 与 $Y(m)$ 同构. 由此我们便看到 $L^2(\Gamma\setminus G)$ 的连续谱的部分了. 关于连续谱的讨论就此结束.

为了方便读者, 我们把定理 5.2.5 的证明中所用的两个公式的证明写在下面.

引理 5.2.7 $\displaystyle\sum_{\substack{c>0\\ d\bmod c\\ (c,d)=1}} c^{-s} = \zeta(1-s)\zeta(s)^{-1}.$

证明 引入 Ramanujan 和

$$\gamma_c(n) = \sum_{\substack{d\bmod c\\ (c,d)=1}} e^{2\pi i n d\kappa}.$$

利用 Möbius 函数 μ, 它可表达为

$$\gamma_c(n) = \sum_{l(c,n)}\mu\left(\frac{c}{l}\right)l$$

(Hardy 和 Wright [23] §16.6). 设

$$\varphi_n(s) = \sum_{c>0} c^{-s} \left(\sum_{\substack{d \bmod c \\ (c,d)=1}} e^{2\pi i n d \kappa} \right),$$

则所求的为 $\varphi_0(s)$. 用 Riemann ζ-函数的 Euler 积展开, 有

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_p (1 - p^{-s}) = \Pi \left(1 + \mu(p)p^{-s} + \mu\left(p^2\right)p^{-2s} + \cdots\right) = \sum_{n \geqslant 1} \mu(n) n^{-s}.$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} &= \sum_{l \geqslant 1} \frac{l}{l^s} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\mu(m)}{m^s} = \sum_{l,m} l\mu(m)(lm)^{-s} = \sum_n n^{-s} \sum_{lm=n} l\mu(m) \\ &= \sum_n n^{-s} \sum_{d|s} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi_0(s). \end{aligned}$$

□

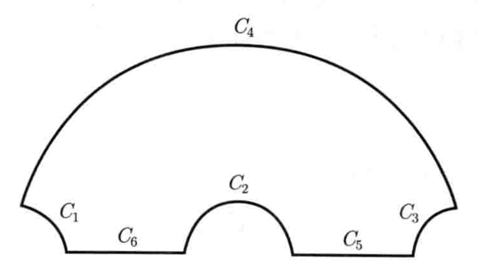
引理 5.2.8 如果 $\mathrm{Re}\,\alpha > 1$, 则

$$\int_0^\pi (\sin\theta)^\alpha \left(e^{i\theta}\right)^\beta d\theta = \frac{\pi e^{\frac{i\pi\beta}{2}} \Gamma(1+\alpha)}{2^\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$

证明 我们把所求积分化为常见的 β 函数. 设 C 是复平面上的逐段光滑曲线. 考虑积分

$$I(C) = \int_C \left(z^{-1} - z\right)^\alpha z^{\beta-1} dz.$$

下图中的大圆为单位圆, 小圆的半径为 ε:



当 $\varepsilon \to 0$ 时, $I(C_i) \to 0$, $i = 1,2,3$. 在 C_4 上可设 $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, 则当 $\varepsilon \to 0$ 时, 有

$$I(C_4) \to 2^\alpha (i)^{1-\alpha} \int_0^\pi (\sin\theta)^\alpha \left(e^{i\theta}\right)^\beta d\theta,$$

$$
\begin{aligned}
I(C_5) \to \int_0^1 \left(x^{-1}-x\right)^{\alpha} x^{\beta-1}dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}(1-t)^{(1+\alpha)-1}dt \\
&= \frac{1}{2}B\left(\frac{\beta-\alpha}{2}, 1+\alpha\right) \\
&= \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi(\beta-\alpha)}{2}\right)} \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)},
\end{aligned}
$$

其中 $t = x^2$. 同样可以算出 $I(C_6)$ 的极限. 最后只需注意

$$
2\sin\frac{\pi(\beta-\alpha)}{2} = e^{-\frac{i\pi\beta}{2}} i^{1+\alpha} - e^{\frac{i\pi\beta}{2}} i^{1-\alpha}. \qquad \square
$$

这里还应指出, 本章的理论是 A. Selberg 在 20 世纪 50 年代发展起来的. R. P. Langlands 已把这一理论推广至任意李群.

5.3 微 分 方 程

本节谈齐性空间的微分方程理论. 这与本书的主题拓扑群有点距离. 但这是李群表示论的中心方法, 是很值得我们学习的. 要学习这一节读者需要一点微分几何学的知识, 可以参看 [Che 03], [CC 83], [Yen 60], [Hel 78].

当今研究微分流形的微分方程与积分方程理论称为几何分析 (比如 [Hel 08], [Li 12]). 特别的方程, 如热方程就有很多专著 (如 [BGV 08], [Gil 94], [Gri 12], [CZFI 11], [Dav 90]). 如果你想了解来自量子场论的 Dirac 算子 ([Tha 92]) 也有很多专著 (如 [Cno 02], [Esp 98], [Fri 00], [HP 06], [LM 90]).

5.3.1 微分算子

不过我们在这里谈的不是如上的一般理论. 我们要谈的是一个特殊的齐性空间 —— 对称空间的微分方程理论. 在此之前我们讲一点微分流形上的微分算子的定义和性质. 这对学习第 7 章会有点帮助的.

我们从 $\mathbb{R}^n$ 上的偏微分方程说起, 设 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 其中 α_j 是非负整数. 定义 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, 并且

$$
\partial^{\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.
$$

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集, 我们要讨论的是下面的线性偏微分算子:

$$
p(x, \partial) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_{\alpha}(x)\partial^{\alpha},
$$

其中 $a_\alpha(x)$ 是 Ω 上的函数. 给出 Ω 上的函数 f, 便有线性微分方程 $P(x,\partial)u=f$ 求解 u 的问题.

从常微分方程到偏微分方程有新现象: 偏微分方程可以有无穷多个线性无关解. 举个例子. 设

$$D_j=-\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

考虑常系数偏微分方程

$$P(D)u=0,\quad P(D)=\sum c_\alpha D^\alpha.$$

记 $\mathbb{R}^n$ 的内积为 $\langle\xi,x\rangle=\xi_1x_1+\cdots+\xi_nx_n$, 则

$$P(D)e^{i\langle\xi,x\rangle}=P(\xi)e^{i\langle\xi,x\rangle}.$$

所以, 当 $n>1$ 时, $P(D)u=0$ 的解空间包含无穷维空间

$$\{e^{i\langle\xi,x\rangle}:P(\xi)=0\}.$$

还有一点, 偏微分方程与常微分方程不同的地方是一个偏微分方程的求解方法与解的性质常与这个方程的特别形状有关, 比如我们把二阶常系数偏微分方程分为椭圆方程 (调和方程)、双曲线方程 (波动方程)、抛物方程 (热传导方程) 几类. 当然这样分类跟这些方程的物理学来源有关. 另外, 大家比较有兴趣深入研究在自然科学或工程技术中出现的方程. 为了说明这一点我们介绍一个著名的定理.

称多元复变函数 $F(z_1,\cdots,z_m)$ 在点 $(z_1^0,\cdots,z_m^0)$ 的邻域为解析函数, 如果点 $(z_1^0,\cdots,z_m^0)$ 的一个邻域内有收敛幂级数表达式

$$F(z_1,\cdots,z_m)=\sum_{k_1,\cdots,k_m}c_{k_1,\cdots,k_m}\left(z_1-z_1^0\right)^{k_1}\cdots\left(z_m-z_m^0\right)^{k_m}.$$

定理 5.3.1(Cauchy-Kowalewski) 考虑偏微分方程组

$$\partial_0^{n_i}u_i=F_i\left(x_0,x_1,\cdots,x_n;u_1,\cdots,u_N;\cdots,\partial^\alpha\partial^k u_j,\cdots\right),$$

其中 $1\leqslant i,j\leqslant N$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $k+|\alpha|\leqslant n_j$, $k<n_j$. $\partial_0=\dfrac{\partial}{\partial_{x_0}}$. 给定函数 $\phi_{j,k}(x_1,\cdots,x_n)$ 为始值条件:

$$\partial_0^k u_j=\phi_{j,k},\quad 1\leqslant j\leqslant N,\ 0\leqslant k\leqslant n_j-1.$$

如果所有 $\phi_{j,k}$ 在点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 为解析函数, F_i 在点 $(x^0,x_1^0,\cdots,x_n^0;\ \phi_{1,0},\cdots,\partial^\alpha\phi_{j,k}\left(x_1^0,\cdots,x_n^0\right),\cdots)$ 为解析函数, 则在点 $(x_0^0,x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的邻域存在唯一的解析函数 $u_1,\cdots,u_N$ 满足已给方程组及始值条件 (见 [Pet 54] I §2; [Tre 75] II §17).

可以问: 有没有其他的偏微分方程可以变化为 Cauchy-Kowalewski 定理中的方程组? 为了简单我们以一个线性方程为例子. 设

$$P(x_0,x,\partial_0,\partial)=\sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant m}a_{\alpha_0,\alpha}(x_0,x)\partial_0^{\alpha_0}\partial^\alpha,$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\partial_0=\dfrac{\partial}{\partial x_0}$, $\partial^\alpha=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$.
定义 $P_m(x_0,x,\eta_0,\eta)=\sum\limits_{\alpha_0+|\alpha|=m}a_{\alpha_0,\alpha}(x_0x)\eta_0^{\alpha_0}\eta^\alpha$, $(\eta_0,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}$. 设

$$C_p(x_0,x)=\left\{(\eta_0,\eta)\in\mathbb{R}^{n+1}|P_m(x_0,x,\eta_0,\eta)=0\right\},$$

固定 (x_0,x) 时 P_m 关于 (η_0,η) 是 m 次齐次多项式, $C_p(x_0,x)$ 是锥面. 如果 $(1,0)\notin C_p(x_0,x)\forall(x_0,x)$ 成立, 则 $a_{m,0}(x_0,x)\neq0$, 这样, 只要把方程 $P(x_0,x,\partial_0,\partial)_u=g$ 乘以 $1/a_{m,0}$ 便得 Cauchy Kowalewski 定理中的方程同形式.

以上的例子引发以下的定义. 我们不再考虑 $(x_0,x)\in\mathbb{R}^{n+1}$, 而是改用 $y\in\mathbb{R}^N$. 考虑微分算子

$$P(y,\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(y)\partial^\alpha,\quad y\in\Omega\leqslant\mathbb{R}^N$$

为开集. 设

$$P_m(y,\eta)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(y)\eta^\alpha,$$

这里把 $\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_N)\in\mathbb{R}^N$ 看作余向量 ($\mathbb{R}^N$ 的余切向量空间), $y^\alpha=\eta_1^{\alpha_1}\cdots\eta_N^{\alpha_N}$. 设

$$C_p(y)=\left\{\eta\in\mathbb{R}^N:P_m(y,\eta)=0\right\}.$$

假设有光滑超曲面 (hypersurface)$S\subset\Omega$. 对 $y\in S$, 以 $\eta_S(y)$ 记 S 在 y 的单位法向量 (normal vector). 如果 $\forall y\in S$, $\eta_S(y)\in C_p(y)$, 则称 S 为微分算子 P 的特征超曲面 (characteristic hypersurface). 如果 $\forall y\in S$, $\eta_S(y)\notin C_p(y)$, 则称 S 是非特征的 (non-characteristic).

定理 5.3.2 设 Ω 为 $\mathbb{R}^N$ 的开集, $\Sigma\subset\Omega$ 为解析超曲面, 并设 f 为 Ω 上的解析函数, $u_j(0\leqslant j\leqslant m-1)$ 为 Σ 上的解析函数. 给定微分算子

$$P(y,\partial)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(y)\partial^\alpha.$$

假设 Σ 对 P 是非特征的, 则存在 Σ 在 Ω 内的开邻域 U 及 U 上唯一的解析函数 u 使得

$$P(y,\partial)u=f,\qquad\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^ju=u_j\quad(0\leqslant j\leqslant m-1)$$

在 U 上成立, 其中 $\dfrac{\partial}{\partial\nu}$ 是 Σ 法向微分 (见 [Tre 75] 定理 19.1; [Pet 54]§3.3).

偏微分方程理论是一个庞大的专业, 但是每一个学习分析的学生是有必要学一点基础的偏微分方程理论的. 这方面的教科书真的很多. 我们介绍一本比较新的 [Jos 02].

现在微分方程与李群表示论的关系是透过 D-模理论表现出来的. 代数 D-模理论可看 [Bor 87], 解析 D-模理论可看 [Bjo 93], D-模与李群表示论可看 [HTT 08]. 如果你懂法文, 可参考 [MS 93], [Mal 91], [Meb 89].

设 X 是拓扑空间. $f: X\to\mathbb{C}$ 是函数. f 的支集 (support) 是指集合 $\{x\in X|f(x)\neq 0\}$ 的闭包. 以 $\mathrm{supp}(f)$ 记 f 的支集. 设 $V\subseteq\mathbb{R}^n$ 为开集.

由所有具有紧支集的光滑函数 $V\to\mathbb{C}$ 所组成的复向量空间记为 $C_c^\infty(V)$(或 $D(V)$). 定义在 V 上的全部复值光滑函数记为 $C^\infty(V)$(或 $\varepsilon(V)$).

定理 5.3.3(Peetre) 设 $V\subseteq\mathbb{R}^n$ 为开集, $D: C_c^\infty(V)\to C_c^\infty(V)$ 为线性映射, 则以下两个关于 D 的条件等价.

(1) 对任一 $\phi\in C_c^\infty(V)$ 必有 $\mathrm{supp}(D\phi)\subseteq\mathrm{supp}\ \phi$;

(2) 对任开集 $U\subset V$ 使得 $\overline{U}$ 为紧集及 $\overline{U}\subset V$, 存在有限个函数 $a_\alpha\in C^\infty(U)$ 使得对 $\phi\in C_c^\infty(U)$ 有

$$D\phi=\sum_\alpha a_\alpha\partial^\alpha\phi,$$

这里 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, α_j 是非负整数,

$$\partial^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

证明见 [Hel 08] II §1, 定理 1.4.

5.3.2 微分流形的微分算子

设有微分流形 X. 在 X 上取光滑向量丛 (参看 [CC 83] 第三章 §1 定义 1.1) $p: E\to X$, $q: F\to X$. 若 $U\subset X$ 为开集. 我们用 $C^\infty(U,E)$(或 $\Gamma(U,E)$) 记向量丛 $p: E\to X$ 在 U 上的全体光滑截面 $s: U\to E$ 所组成的向量空间 (见 [CC 83] 第三章 §1 定义 1.2).

若 $\mathbb{C}$-线性映射

$$D: C^\infty(X,E)\to C^\infty(X,F)$$

使得对任意 $s\in C^\infty(X,E)$, 均有

$$\mathrm{supp}(Ds)\subset\mathrm{supp}(s),$$

则称 D 为从 E 到 F 的微分算子 (differential operator).

我们考虑一个特别的情形: 平凡向量丛. 此时微分流形 X 上的微分算子是指线性映射 $D : C_c^\infty(X) \to C_c^\infty(X)$ 使得对任意 $f \in C_c^\infty(X)$ 均有

$$\operatorname{supp}(Df) \subset \operatorname{supp} f.$$

设 (U, ϕ) 为 X 的一个坐标卡, 则映射

$$D^\phi : F \mapsto (D(F \circ \phi)) \circ \phi^{-1}, \quad F \in C_c^\infty(\phi(U))$$

满足 Peetre 定理 5.3.3. 故若有开集 $W \subset U$, W 在 X 的闭包 $\overline{W}$ 是 U 的子集, $\overline{W}$ 为紧集, 则存在有限个 $a_\alpha \in C^\infty(W)$ 使得

$$Df = \sum_\alpha a_\alpha \left(\partial^\alpha \left(f \circ \phi^{-1}\right)\right) \circ \phi, \quad f \in C_c^\infty(W).$$

设 X 为微分流形; $p : E \to X$, $q : F \to X$ 为光滑向量丛. 利用函数相乘把光滑截面空间 $C^\infty(X, E)$ 看作光滑函数环 $C^\infty(X)$ 的模. 称从 $C^\infty(X, E)$ 到 $C^\infty(X, F)$ 以 $C^\infty(X)$ 模同态为 O-阶微分算子, 记

$$D_{X,0}(E, F) := \operatorname{Hom}_{C^\infty(X)} (C^\infty(X, E), C^\infty(X, F)).$$

于是 $T \in D_{X,0}$ 是指复线性映射 $T : C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, F)$ 使得对任意 $f \in C^\infty(X)$ 有 $T(fu) = fT(u)$, $u \in C^\infty(X, E)$.

设

$$T \in \operatorname{Hom}_\mathbb{C} (C^\infty(X, E), C^\infty(X, F)).$$

定义 $\operatorname{ad}(f)T = f \circ T - T \circ f$. 显然

$$D_{X,0}(E, F) = \{T \in \operatorname{Hom}_\mathbb{C} (C^\infty(X, E), C^\infty(X, F)) \mid \operatorname{ad}(f)T = 0, \ \forall f \in C^\infty(X)\}.$$

对 $m > 0$, 定义

$$\begin{aligned} D_{X,m}(E, F) = &\{T \in \operatorname{Hom}_\mathbb{C} (C^\infty(X, E), C^\infty(X, F)) \mid \\ &\forall f \in C^\infty(X), \ \operatorname{ad}(f)T \in D_{X,m-1}(E, F)\}. \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} D_{X,m}(E, F) = &\{T \in \operatorname{Hom}_\mathbb{C} (C^\infty(X, E)), C^\infty(X, F) | \\ &\forall f_i \in C^\infty(X), \ \operatorname{ad}(f_0)\operatorname{ad}(f_1) \cdots \operatorname{ad}(f_m)T = 0\}. \end{aligned}$$

命题 5.3.1 设 $T \in D_{X,m}(E, F)$, $u \in C^\infty(X, E)$, 则

$$\operatorname{supp} Tu \subset \operatorname{supp} u.$$

证明　对 m 作归纳法. 当 $m = 0$ 时, 由 $D_{X,0}$ 的定义得所求. 现取 $T \in D_{X,m+1}(E,F)$, $u \in C^\infty(X,E)$, $f \in C^\infty(X)$, 则

$$T(fu) = f(Tu) - (\mathrm{ad}(f)T)(u).$$

由定义, $\mathrm{ad}(f)T \in D_{X,m}(E,F)$. 由归纳假设,

$$\mathrm{supp}(\mathrm{ad}(f)T)(u) \subset \mathrm{supp}\ u,$$

所以对 $f \in C^\infty(X)$, 有

$$\mathrm{supp}\ Tfu \subseteq \mathrm{supp}\ f \bigcup \mathrm{supp}\ u.$$

取任意开集 $U \supseteq \mathrm{supp}\ u$, 存在 $f \in C^\infty(X)$ 使得在 $\mathrm{supp}\ u$ 上 $f = 1$, 在 U 外 $f = 0$. 于是 $fu = u$. 命题得证. □

我们称 $D_{X,m}(E,F)$ 为阶 $\leqslant m$ 的微分算子. 显然若 $n \leqslant m$, 则 $D_{x,n}(E,F) \subseteq D_{x,m}(E,F)$. 引入记号

$$D_X(E,F) = \bigcup_{m \geqslant 0} D_{X,m}(E,F).$$

设 V 为复向量空间, V^* 为 V 的对偶空间. 所谓自然偶对是指映射

$$V^* \times V \to \mathbb{C} : v^*, v \mapsto v^*(v).$$

常以 $\langle v^*, v \rangle$ 记 $v^*(v)$. 设 X 为测度空间. 取映射 $v^* : X \to V^*$, $v : X \to V$. 若以下积分有限, 亦可得偶对

$$\langle v^*, v \rangle := \int_X \langle v^*(x), v(x) \rangle dx.$$

设 $T : V \to W$ 为向量空间线性映射, T 的伴随映射 (adjoint map) 是指由以下公式所决定的线性映射 $T^* : W^* \to V^*$:

$$\langle T^* w^*, v \rangle = \langle w^*, Tv \rangle, \quad v \in V.$$

当 V 是内积空间时, 内积定义偶对 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. 这样在以上讨论中便以 V 代替 V^* 了.

把以上讨论应用在微分算子上便得伴随算子. 我们将按不同的假设分两个情形讨论.

(1) 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集. 在 U 上取微分算子

$$P = \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha.$$

P 的 (形式) 伴随算子是指

$$^tP\phi = \sum(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha(a_\alpha\varphi)$$

(如果 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$). 如果 $u, \phi \in C_c^\infty(U)$ 及 $\text{supp}\, u \bigcap \text{supp}\, \phi$ 是紧集, 则有等式

$$\int ({}^tP\phi)\, udx = \int \phi Pudx,$$

这是用分部积分得到的.

为了简化讨论我们假设微分流形 X 有光滑单位分解 (见 [che 03] § 2.2.3), 并且存在紧子集 K_j 使得 $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$, K_j 的点为 K_{j+1} 的内点 (interior point).

若 (U, ϕ) 为 X 的坐标卡, 则在 $C^\infty(U)$ 上取拓扑使得 $f_n \in C^\infty(U)$, $f_n \to 0$ 当且仅当对 U 上任一微分算子 D, 序列 $\{Df_n\}$ 在 U 的任意紧子集上一致收敛于零. 在 $C^\infty(X)$ 取这样的拓扑: $\mathscr{U} \subset C^\infty(X)$ 为开集当且仅当对任意坐标卡 (U, ϕ) 集合 $\{f|_U : f \in \mathscr{U}\}$ 为 $C^\infty(U)$ 的开集, $f|_U$ 是指 f 限制为 U 的函数. 设 $K \subseteq X$ 为紧子集, 以 $C_K^\infty(X)$ 记集合 $\{f \in C^\infty(X) : \text{supp}\, f \subseteq K\}$. 在 $C_K^\infty(X)$ 取从 $C^\infty(X)$ 诱导的拓扑 (inoluced topology). 把 $C_c^\infty(X)$ 看作 $C_K^\infty(X)$ 的正向极限 (direct limit), 在 $C_c^\infty(X)$ 取正向极限拓扑 ([Sch 80] II 章 6 节). 以 $C_c^\infty(X)'$(或 $D'(X)$) 记全部连续线性映射 $C_c^\infty(X) \to \mathbb{C}$, 称 $C_c^\infty(X)'$ 的元素为分布 (distribution) 或广义函数.

我们利用偶对 $C_c^0(X)' \times C_c^\infty(X) \to \mathbb{C} : T, f \mapsto T(f)$ 从微分算子 $P : C_c^\infty(X) \to C_c^\infty(X)$ 得它的伴随算子 (adjoint operator) $P^* : C_c^\infty(X)' \to C_c^\infty(X)'$:

$$\langle P^*T, f\rangle = \langle T, Pf\rangle, \quad f \in C_c^\infty(X),\ T \in C_c^\infty(X)'.$$

我们称流形 X 的测度 μ 等价于 Lebesgue 测度, 如果在任意坐标卡 U 上, $\mu = fdx$, $f \in C^\infty(U)$; $f(x) \neq 0$, $\forall x \in U$; dx 为 U 上透过坐标定义的 Lebesgue 测度. 假设已给这样的测度 μ, 则有单射

$$C^\infty(X) \to C_c^\infty(X)' : g \mapsto T_g,$$

其中 $T_g(f) = \int_X fgd\mu$, $f \in C_c^\infty(X)$. 我们把 P^* 限制在 $C^\infty(X)$ 上, 并记 P^*T_g 为 P_g^*. 由于广义函数是可以局部确定的 (见 [Rud 91] 定理 6.21). 可以假设 $g \in C_c^\infty(U)$, U 为 X 的开坐标卡. 这样便有

$$\int_U ({}^tP_g)fd\mu = \int_U g(Pf)d\mu,$$

而且 $\text{supp}\, {}^tPg \subseteq \text{supp}\, g$ 和 ${}^tPg \in C^\infty(X)$. 于是得 $P^*g \in C^\infty(X)$, $\text{supp}\, P^*g \subseteq \text{supp}\, g$. 所以可以说 $P^* : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ 是微分算子, 称为 P 的伴随算子.

(2) 已给定向黎曼流形 (X, g). X 上的 r 次微分式的全体所组成的向量空间记为 $A^r(X)$ $(= C^\infty(X, \Lambda^r T^* X))$ ([Che 03] §3.2.2). 黎曼度量 g 在 $A^r(X)$ 上所决定的内积记为 $(\cdot,\cdot)_g$, Hodge 星算子 ([Ch 03] §4.5)

$$* : A^r(X) \to A^{n-r}(X), \quad n = \dim X$$

可由以下公式确定: 对 $\alpha, \beta \in A^r(X)'$ 有

$$\alpha \wedge *\beta = (\alpha, \beta)_2 \omega,$$

其中当 $(x^1, \cdots, x^n)$ 为正向局部坐标架时, ω 是 $\sqrt{|g|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. 事实上, 称微分流形可定向 (orientable) 的是指存在 $0 \neq \omega \in C^\infty(X, \Lambda^n T^* X)$. 我们在这里只不过在坐标卡上选定 ω 而已. 这样我们便在定向黎曼流形上利用黎曼度量选定了测度.

设 $p : E \to X$, $q : F \to X$ 为黎曼流形 (X, g) 上的光滑向量丛. 假设在 E, F 上有 (对 X 连续) 内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$. 设有微分算子 $P \in D_X(E, F)$. 若有微分算子 $Q \in D_X(F, E)$ 使得对任意 $u \in C_c^\infty(X, E)$, $v \in C_c^\infty(X, F)$ 以下公式成立

$$\int_X \langle Pu, v\rangle \omega = \int_X \langle u, Qv\rangle \omega,$$

则称 Q 为 P 的形式伴随算子 (formal adjoint). 以 P^* 记 Q, 在以上的假设下, 可以证明 P^* 是存在和唯一的.

设 A, B 为映射, 我们记交换子为

$$[A, B] := A \circ B - B \circ A,$$

这样 $\mathrm{ad}(f)T$ 记为 $[f, T]$.

引理 5.3.1 设 $p \in D_X(E, F)$, $f, g \in C^\infty(X)$, 则

$$[f, [g, P]] = [g, [f, P]].$$

证明 按 Jacobi 恒等式,

$$[f, [g, P]] + [g, [P, f]] + [P, [f, g]] = 0,$$

但由 $[f, g] = 0$ 和 $[P, f] = -[f, P]$ 便得引理.

T^*X 为 X 的余切向量丛. 在 $a \in X$ 的余切空间记为 T_a^*X.

命题 5.3.2 设 $P \in \mathscr{D}_{X,m}(E, F)$; $f_j, g_j \in C^\infty(X)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. 取 $a \in X$, 设 $df_j(a) = dg_i(a) \in T_a^* X, 1 \leqslant j \leqslant m$, 则

$$(\mathrm{ad}(f_1)\mathrm{ad}(f_2)\cdots\mathrm{ad}(f_m)P)|_a = (ad(g_1)ad(g_2)\cdots\mathrm{ad}(g_m)P)|_a.$$

证明 因为 ad(常数) $= 0$, 所以只要对 f_j 加适当的常数, 我们可以假设

$$f_j(a) = g_j(a), \quad \forall j.$$

余下证明对 m 作归纳法. 设 $\phi = f_1 - g_1$ 和 $Q = \mathrm{ad}(f_2)\cdots\mathrm{ad}(f_m)P \in D_{X,1}(E,F)$. 只需证明 $\mathrm{ad}(\phi)Q|_a = 0$.

首先 $\phi(a) = 0,\ d\phi(a) = 0$.

设

$$m_a = \{f \in C^\infty(X) | f(a) = 0\},$$
$$J_a^1 = \{f \in C^\infty(X) | f(a) = 0,\ df(a) = 0\}.$$

则从局部 Taylor 展开式得 $J_a^1 = m_a^2$, 即, 若 $\phi \in J_a^1$, 则有 $\alpha_j, \beta_j \in m_a$ 使得

$$\phi = \sum_j \alpha_j \beta_j,$$

我们有

$$[\alpha\beta, Q] = \alpha\beta Q - Q(\alpha\beta) = \alpha(\beta Q - Q\beta) + \alpha Q\beta - Q(\alpha\beta) = \alpha[\beta, Q] + [\alpha, Q]\beta.$$

于是

$$\mathrm{ad}(\phi)Q = \sum[\alpha_j\beta_j, Q] = \sum \alpha_j[\beta_j, Q] + [\alpha_j, Q]\beta_j.$$

但 Q 的阶 $\leqslant 1$, 所以 $[\alpha_j, Q]$ 是 0 阶, 即有 $[\alpha_j, Q]\beta_j = \beta_j[\alpha_j, Q]$. 现从 $\alpha_j(a) = \beta_j(a) = 0$ 得 $\mathrm{ad}(\phi)Q|_a = 0$. □

从命题 5.3.2 得知, 若 $P \in D_{X,m}(E,F)$, $a \in X$, $f_j \in C^\infty(X)$, $1 \leqslant j \leqslant m$. 线性映射

$$\left(\frac{1}{m^1}\mathrm{ad}(f_1)\cdots\mathrm{ad}(f_m)P\right)\Big|_a : E_a \to F_a$$

完全由 $\xi_1 = df_1(a), \cdots, \xi_m = df_m(a) \in T_a^*X$ 所决定. 这样所得的线性映射我们记为

$$S_P(\xi_1, \cdots, \xi_m) : E_a \to F_a, \quad \xi_j \in T_a^*X.$$

显然对 $\xi_1, \cdots, \xi_m$ 映射 S_P 是对称的.

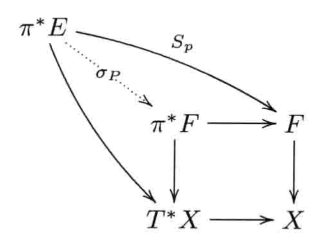
以 $\pi : T^*X \to X$ 记余切向量丛. 以 π^*E 记 $T^*X \times XE$(E 沿 π 的拉回 =Pull back). 我们定义 $S_P : \pi^*E \to F$ 如下: 在 $a \in X$, 取 $\xi \in T_a^*X$, $e \in E_a$,

$$S_P(\xi, e) = S_P(\xi, \cdots, \xi)(e).$$

由 π^*F 的拉回结构, 知有向量从映射

$$\sigma_P : \pi^*E \to \pi^*F$$

使下图交换:



我们称 $\sigma_P \in\mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*f)$ 为微分算子 $P \in D_X(E, F)$ 的符号 (symbol). 显然如果 $P \in D_{X,m}(E, F)$, $Q \in D_{X,m}(F, B)$, 则 $Q \circ P \in D_{X,m+n}(E, B)$, 并且 $\sigma_{Q\circ P} = \sigma_Q \circ \sigma_P$.

例 5.3.1　$\varDelta : C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \to C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$,

$$\varDelta = -\sum_{i=1}^{N} \partial_i^2, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^N\right).$$

则

$$(\mathrm{ad}(f)\partial_i)(u) = f\partial_i u - \partial_i(fu) = (-u)(\partial_i f),$$

即 $\mathrm{ad}(f)\partial_i = -\partial_i f$ 和

$$\left(\mathrm{ad}(f)\partial_i^2\right)(u) = f \cdot \partial_i^2 u - \partial_i^2(fu) = f \cdot \partial_i^2 u - \left(\left(\partial_i^2 f\right) u + 2\partial_i f \partial_i u + f\partial_i^2 u\right),$$

即 $\mathrm{ad}(f)\partial_i^2 = -\partial_i^2 f - 2\partial_i f \partial_i$. 所以

$$\mathrm{ad}(f)\varDelta = -\sum_i \mathrm{ad}(f)\partial_i^2 = +\varDelta f + 2\sum_i \partial_i f \partial_i,$$

及

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(f)^2\varDelta &= \mathrm{ad}(f)(\varDelta f) + 2\sum \partial_i f \mathrm{ad}(f)\partial_i \\ &= 0 + 2\sum(\partial_i f)(-\partial_i f) \\ &= -\sum_i(\partial_i f)^2 = -2|df|^2.\end{aligned}$$

取 $\xi = df$, 则

$$\sigma_\varDelta(\xi) = -|\xi|^2.$$

我们称 $P \in D_{X,m}(E,F)$ 为椭圆微分算子, 如果对任意 $a \in X, \xi \in T_a^*X, \xi \neq 0$, 由 P 的符号所得的 $\mathbb{C}$ 线性映射

$$\sigma_P(\xi): E_a \to F_a$$

是单射. 从以上例子的计算可见 $\mathbb{R}^N$ 上的 Laplace 算子 $\Delta = -\sum_i \partial_i^2$ 是椭圆算子.

设 (X,g) 为黎曼流形 (见 [CC 83] 第五章, [Che 03] 第四章 4.1.2). 称 $L \in D_{X,2}(E,E)$ 为 Laplace 算子, 如果 $\sigma_L(\xi) = -|\xi|_g^2 \mathbb{I}_E$ ($|\cdot|_g$ 为黎曼度量 g 在余切向量从 T^*X 所决定的长度). 称 $D \in D_{X,1}(E,E)$ 为 Dirac 算子, 如果 D^2 是 Laplace 算子.

例 5.3.2 在复平面上, 有 $z = x + y\sqrt{-1}$. 设

$$\partial = \frac{1}{\partial}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \overline{\partial} = \frac{1}{\partial}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

在复平面 $\mathbb{C}$ 上的平凡丛 $(\underline{\mathbb{C}}^2)$ 赋以标准度量.

定义 $D: C^\infty(\underline{\mathbb{C}}^2) \to C^\infty(\underline{\mathbb{C}}^2)$ 为

$$D: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \partial \begin{pmatrix} 0 & -\partial \\ \overline{\partial} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

直接计算得知 D 为 Dirac 算子.

设 (X,g) 是黎曼流形, T^*X 是 X 的余切向量丛, $\Lambda^r T^*X$ 是 T^*X 的 r 次外积, ΛX 是 $\bigoplus_{r \geqslant 0} \Lambda^r T^*X$, 则 $AX = C^\infty(X, \Lambda X)$ 的元素便是 X 的微分形式 (见 [Che 03] 第三章).

我们说光滑向量丛 $p: E \to X$ 有 Clifford 结构, 如果存在丛态射 $C: T^*X \bigotimes E \to E$ 使得对 $\xi, \eta \in A'X = C^\infty(X, T^*X)$ 有

$$\{c(\xi), c(\eta)\} = -2g(\xi,\eta)\mathbb{I}_E,$$

其中反交换子 (anticommutator) $\{A,B\} := AB + BA$.

命题 5.3.3 E 有 Clifford 结构当且仅当存在 Dirac 算子 $D: C^\infty(E) \to C^\infty(E)$.

证明 设 $D: C^\infty(E) \to C^\infty(E)$ 为 Dirac 算子. 在讨论微分算子等号时我们有映射 $S_D: T^* \times \bigotimes E = \pi^*E \to E$, 其中 $\pi: T^*X \to X$ 为余切向量丛. 按 Dirac 算子定义, 对 $\xi \in T_a^*X$ $(a \in X)$, 有

$$S_D(\xi)^2 = S_{D^2}(\xi) = -|\xi|_g^2 \cdot \mathbb{I}_{E_a}.$$

从

$$S_D(\xi+\eta)^2 = -|\xi+\eta|^2,$$

得 $\{S_D(\xi), S_D(\eta)\} = -2g(\xi,\eta)\mathbb{I}$. 于是, Dirac 算子的符号给出 E 的 Clifford 结构.

另一方面, 设有 Clifford 结构 $c: T^*X\bigotimes E \to E$. 取任意连络 ([CC 83] 第五章第 1 节定理 1.2) $\nabla: C^\infty(E) \to C^\infty(T^*X\bigotimes E)$. 取合成 $D = c\circ\nabla$. 可验证 D 为 Dirac 算子, 其符号 S_D 等于 c. □

以上的讨论可以用一个更好的方法来研究. 设 $E \to X$ 是一个定向黎曼向量丛 ([LM 90] II §1 p78), 则可以定义 E 的 Clifford 丛 $\mathrm{Cl}(E)$. 以 $\mathrm{Cl}(X)$ 记 $\mathrm{Cl}(TX)$([LM 90] P. 95, 111). $\mathrm{Cl}(X)_a$ $(a\in X)$ 是 (T_aX, g_a) 的 Clifford 代数. 如果 S 是 $\mathrm{Cl}(X)$ 模丛, 则 S 便自然有这里的 Clifford 结构了. 详情请看 [LM 90], [RGV 08].

外微分 $d: A^r(X) \to A^{r+1}(X)$ 是一阶微分算子 ([Che 03]§§3.2.3). 以下计算 d 的符号: 取 $\omega \in A^r(X)$, $f\in C^\infty(X)$, 则

$$(\mathrm{ad}(f)d)(\omega) = fd\omega - d(f\omega) = -df\wedge\omega.$$

设 $\xi = df$. 以 $\mathrm{ext}(\xi): A^*(X) \to A^*(X)$ 记左外乘算子 L(exterior multiplication), $\mathrm{ext}(\xi)(\omega) = \xi\wedge\omega$. 则可见 d 的符号是 $\sigma_d(\xi) = -\mathrm{ext}(\xi)$.

利用 Hodge$*$ 算子. 我们在定向黎曼流形 X 上引入另一个微分算子 $d^*: A^r(X)\to A^{r-1}(X)$. 定义

$$d^* = (-1)^{nr+n+1} * d * .$$

引理 5.3.2 设 $\alpha\in A^{r-1}$, $\beta\in A^r(X)$. 假定 α, β 其中之一有紧支集. 以 ω 记由黎曼度量所决定 X 的测度, 则

$$\int_X (d\alpha,\beta)_g\omega = \int_X (\alpha, d^*\beta)_g\omega.$$

证明 由于

$$\int_X (d\alpha,\beta)_g\omega = \int_X d\alpha\wedge *\beta = \int_X d(\alpha\wedge *\beta) + (-1)^n\int_X \alpha\wedge d(*\beta),$$

按照 Stokes 定理,

$$\int_X d(\alpha\wedge *\beta) = \int_{\partial X}\alpha\wedge *\beta = 0.$$

因为 α,β 其中之一有紧支集. 由于 $d(*\beta)\in A^{n-r+1}(X)$, 而在 $A^{n-1+r}(X)$ 上, $*^2 = (-1)^{(n-r+1)(r-1)}$, 得

$$(-1)^r\int_X \alpha\wedge d*\beta = (-1)^{r+(n-r+1)(r-1)}\int_X \alpha\wedge **d*\beta = \int_X \alpha\wedge *d^*\beta = \int_X (\alpha, d^*\beta)\omega,$$

其中用了 $r+(n-r+1)(r-1)\equiv nr+n+1 \pmod 2$. □

设 $\eta,\xi_1,\cdots,\xi_r\in A^1(X)$. 定义内乘 (interior multiplication) 如下:

$$\mathrm{int}(\eta)(\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_r)=\sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-1}(\eta,\xi_j)_g\xi_1\wedge\cdots\wedge\hat{\xi}_j\wedge\cdots\wedge\xi_r,$$

其中 $\hat{\xi}_j$ 是指没有 ξ_j 这一项. 常记 $\mathrm{int}(\eta)$ 为 $\eta\rfloor$.

现设 $\xi\in T_a^*X$ $(a\in X)$. 假设 $|\xi|=1$. 把 ξ 扩展为 T_a^*X 的法正交基 $\xi_1,\cdots,\xi_n$, 其中取 $\xi_1=\xi$, $n=\dim X$. 计算微分算子 d^* 的符号. 首先在 $A^r(X)$ 上,

$$\sigma_{d^*}=(-1)^{nr+n+1}*\sigma_d*.$$

取 $\omega=\xi_{i_1}\wedge\cdots\wedge\xi_{i_r}\in\Lambda^rT_a^*M$, $i_1<\cdots<i_r$. 计算 $\sigma_{d^*}(\xi,\omega)$. 如果没有一个 $i_1,\cdots,i_r$ 是 1, 则 $*\omega=\cdots\wedge\xi_1\wedge\cdots$ 及 $\sigma_d(\xi,\cdot)=-\mathrm{ext}(\xi_1)$ (左乘 $\xi_1\wedge\cdots$), 所以这时, $\sigma_{d^*}(\xi,\omega)=0$. 如果有一个 $i_1,\cdots,i_r$ 是 1, 为了简化计算, 取 $\omega=\xi_1\wedge\cdots\wedge\xi_r$. 这时

$$\begin{aligned}\sigma_{d^*}(\xi,\omega)&=(-1)^{nr+n+1}*-\mathrm{ext}(\xi_1)(*\omega)\\&=(-1)^{nr+n}*(\xi_1\wedge\xi_{r+1}\wedge\cdots\wedge\xi_n)\\&=(-1)^{nr+n+(n-r)(r-1)}\xi_2\wedge\cdots\wedge\xi_k=\xi\rfloor\omega.\end{aligned}$$

所以得 d^* 的符号 $\sigma_{d^*}(\xi)=\mathrm{int}(\xi)$.

称 $d+d^*:A(X)\to A(X)$ 为 X 的 Hodge-DeRham 算子. 计算符号

$$\sigma_{d+d^*}=\sigma_d+\sigma_{d^*}=-\mathrm{ext}+\mathrm{int}$$

和

$$\begin{aligned}\sigma_{(d+d^*)^2}(\xi)&=(\sigma_d+\sigma_{d^*})^2(\xi)=(-\mathrm{ext}(\xi)+\mathrm{int}(\xi))^2\\&=-(\mathrm{ext}(\xi)\mathrm{int}(\xi)+\mathrm{int}(\xi)\mathrm{ext}(\xi))=-2|\xi|_g^2,\end{aligned}$$

所以 $d+d^*$ 是 Dirac 算子. 它的符号是 int+ξ−ext.

5.4 齐性空间的微分算子

设 X 为 Hausdorff 拓扑空间, G 为拓扑群, 对每一 $g\in G$, 设有同胚 $\alpha(g):X\to X$. 我们以 $g\cdot x$ 记 $\alpha(g)(x)$. 现设

(1) $g_1\cdot(g_2\cdot x)=(g_1g_2)\cdot x,\ g_1,g_2\in G,\ x\in X$.

(2) $e \cdot x = x$, e 为 G 的单位元, $x \in X$.

(3) $G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \cdot x$ 为连续映射.

我们称 G 为 X 的拓扑变换群 (topological transformation group); 又称 G 作用在 X 上 (G acts on X). 如果对任何 $x, y \in X$, 存在 $g \in G$ 使得 $x = g \cdot y$, 则称 G 为可迁变换群 (transitive transformation group).

例 5.4.1 设 G 为拓扑群. H 为闭子群. 全部陪集 gH, $g \in G$ 所组成的商集记为 G/H. 以 $\pi : G \to G/H : g \mapsto gH$ 记投射. 在 G/H 上的商拓扑 (guotient topology) 是指 G/H 的拓扑使得投射 π 为连续开映射, 即 $V \subset G/H$ 是开集的充要条件是 $\pi^{-1}(V)$ 是 G 的开集. 此时定义

$$g \cdot (g_1 H) := (g g_1) H,$$

则 G 为 G/H 的可迁拓扑变换群. 我们称陪集空间为齐性空间 (homogeneous space).

引理 5.4.1 设局部紧拓扑空间 X 有闭子集 X_n, $n = 1, 2, \cdots$, 使得 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, 则有一 X_n 包含 X 的开集.

证明 设所有 X_n 均不包含 X 的开集.

取 X 的开集 U_1 使得它的闭包 $\overline{U}_1$ 是紧集. 再取 $a_1 \in U \backslash X_1$, a_1 之邻域 U_2 使得闭包 $\overline{U}_2 \subset U_1$ 和 $\overline{U}_2 \bigcap X_1 = \varnothing$.

然后, 取 $\alpha_2 \in U_2 \setminus X_2$, α_2 之邻域 U_3 使得 $\overline{U}_3 \subset U_2$ 和 $\overline{U}_3 \bigcap X_2 = \varnothing$.

如此继续, 则 $\overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \overline{U}_3 \supset \cdots$, 所有 $\overline{U}_j$ 为非空紧集. 所以存在 $b \in \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \overline{U}_j$. 不过此时 $b \notin X_j$ 对所有 j 均成立. 这与 $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ 矛盾. □

定理 5.4.1 设 G 为局部紧拓扑群, G 的拓扑有可数基, 并设 X 为局部紧 Hausdorff 拓扑空间. G 为 X 的可迁拓扑变换群. 取 $x_0 \in X$. 设

$$H = \{g \in G : g \cdot x_0 = x_0\},$$

则 H 为 G 的闭子群, 并且映射

$$G/H \to X : gH \mapsto g \cdot x_0$$

为同胚.

证明 由假设知

$$\varphi : G \to G \times X \to X : g \mapsto (g, x_0) \mapsto g \cdot x_0$$

连续, 所以 $H = \varphi^{-1}(x_0)$ 是闭子集. 由 H 的定义知 H 为 G 的子群. 按商拓扑 $\pi : G \to G/H$ 为连续开映射, 所以只需证明 φ 是开映射.

现取 G 的开子集 V 和 $g \in V$. 选单位元 e 的紧邻域 U 满足条件 $U = U^{-1}$, $gU^2 \subset V$. 因 G 有可数拓扑基, 所以有序列 $\{g_n\} \subset G$ 使得 $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} g_n U$. 因为 G 是可迁的, 所以 $X = \bigcup_n g_n U \cdot x_0$. 由 U 是紧知 $g_n U \cdot x_0$ 是紧集, 所以是闭集. 由前面引理 5.4.1, 知有 $g_j U \cdot x_0$ 包含开集. 因为 $x \mapsto g \cdot x$ 是同胚, 所以 $U \cdot x_0$ 包含开集 W. 取 $u \cdot x_0 \in W$. 于是 $x_0 \in u^{-1}W \subset u^{-1}U \cdot x_0 \subset U^2 \cdot x_0 \cdot U^{-1}W$ 为开集. 于是 $gx_0 \in gu^{-1}W \subset V \cdot x_0$, 即是 gx_0 为 $V \cdot x_0$ 的内点, 这就证明了 φ 是开映射. □

设 G 为李群, X 为 (光滑) 微分流形. 再设 G 为 X 的拓扑变换群, 并且 $G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \cdot x$ 为可微映射, 则称 G 为 X 的李变换群. 此时若 H 为 G 的闭子群, 则可以证明: 在陪集空间 G/H 上可构造微分流形结构使得 G 为 G/H 的李变换群 (见 [Hel 78] II §4 定理 4.2).

设 X 为微分流形, $\phi : X \to X$ 为微分同胚 (diffeomorphism), 即 ϕ 为双射, ϕ 和其逆射 $\phi^{-1} : X \to X$ 均是光滑映射. 取微分算子 $D : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$, 则得微分算子 D^ϕ 如下:

$$D^\phi f := (D(f \circ \phi)) \circ \phi^{-1}, \quad f \in C^\infty(X).$$

我们说 D 是 ϕ-不变的 (ϕ-invariant), 如果 $D^\phi = D$, 即 $D(f \circ \phi) = (Df) \circ \phi$. 从此易得: 若 D_1, D_2 是 ϕ 不变, 则 $D_1 \circ D_2$ 亦是.

设 H 为李群 G 的闭子群. 任意 $g \in G$ 定义 G/H 的微分同胚:

$$\tau(g) : G/H \to G/H : xH \mapsto gxH.$$

称微分算子 $D : C^\infty(G/H) \to C^\infty(G/H)$ 为 G-不变微分算子, 如果对所有 $g \in G$ 均有 $D^{\tau(g)} = D$. 以 $\mathscr{D}(G/H)$ 记全部 G/H 的 G 不变微分算子所组成的代数. 有以下几个标准的问题

(A) 怎样利用 G 及 H 的李代数来表达 $\mathscr{D}(G/H)$?

(B) 若 $D \in \mathscr{D}(G/H)$, $f \in C^\infty(G/H)$, 则方程 $Du = f$ 是否可解?

(C) 设有同态 $\chi : \mathscr{D}(G/H) \to \mathbb{C}$. 定义

$$E_\chi := \{f \in C^\infty(G/H) | Df = \chi(D)f, \forall D \in \mathscr{D}(G/H)\}.$$

取 $g \in G$. 定义 $T_\chi(g) : E_\chi \to E_\chi$ 如下: $f \in E_\chi$, $xH \in G/H$, $(T_\chi(g)f)(xH) = f\left(g^{-1}xH\right)$.

易见 T_χ 定义了 G 在 E_χ 上一个表示. 问: 表示 T_χ 的结构? 称 E_χ 为特征空间表示 (eigenspace representation).

例 5.4.2 考虑 $\mathbb{R}^n$ 以平移 ($V \mapsto X + V$; $X, V \in \mathbb{R}^n$) 作用在 $\mathbb{R}^n$ 上.

(A) $\mathbb{R}^n$ 的平移不变微分算子必为常系数微分算子.

(B) 任一常系数微分方程 $Du = f$ 可解 ([Mal 55]).

(C) 任一特征空间表示必是一维, 故是不可约表示.

一个比较复杂的例子是对称空间 G/K: G 是连通半单实李群, K 是 G 的一个极大紧子群, 详情见 [Hel 78], [Hel 84], [Hel 08]. 情形大概是这样, 李群 G 有 Iwasawa 分解 $G = KAN$, 其中 A 为 G 的一个交换李子群. 流形 G/K 在李群 N 的作用下以 $A\cdot\circ$ 为横截流形. 如果 D 是 G/K 上的微分算子, 就可以定义 A 上的微分算子 $\Delta(D)$ 使得 $(Df)(a\cdot\circ) = \Delta(D)(f|_{A\cdot\circ})(a)$ 对任意 N 不变函数 f 均成立. 称 $\Delta(D)$ 为 D 的径向部分 (radial part)([Hel 84] II §3.3). 以 $\mathfrak{a}$ 记 A 的李代数. 若 α 是 $\mathfrak{a}$ 的线性函数, $a \in A$, 则设 $e^{\alpha}(a) = e^{\alpha(\log a)}$. 以 W 记 G 的 Weyl 群. 考虑 A 上的 A-左不变微分算子在 W 的右移动下不变, 全部这样的微分算子组成一个代数, 记作 $\mathscr{D}(A, W)$.

定理 5.4.2　$\mathscr{D}(G/K)$ 为交换代数, 存在 $\mathfrak{a}$ 上的线性函数 ρ 使得映射

$$D \mapsto e^{-\rho}\Delta(D)\circ e^{\rho}$$

定义了一个从 $\mathscr{D}(G/K)$ 到 $\mathscr{D}(A, W)$ 的代数同构 ([Hel 84] II §5, Cor5.4, II, §5, Ihm 5.18).

按 Chevalley 定理 $\mathfrak{a}$ 的 W-不变多项式环可以由 r 个代数无关正次数齐次多项式生成, $r = \dim\mathfrak{a}$. 由此可得结论: $\mathscr{D}(G/K)$ 是由 r 个代数无关元生成的多项式环 ([Hel 84] p.277; III §3.3 Thm 3.1; II §4.2 Thm 4.3). 这时便可以问: 可否把这些生成元明显地表达出来并计算它们的特征值呢? 部分答案见 [Shi 94], [Zg 01].

有趣的是: 在无限维空间及流形上也可以研究微分方程 ([LW 11], [Lem 00], [Fat 85], [DZ 04]), 比如可以研究无穷维有界对称域及 Riccatti 方程 ([Kau 77], [Kau 83]).

习　题

1. 以 $M_n(\mathbb{R})$ 记 $n\times n$ 实导数矩阵. 以 X^t 记矩阵 X 的转置矩阵, 即 $(X^t)_{ij} = X_{ji}$. 设

$$O(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) | X^tX = I\},$$

其中 I 为 $n\times n$ 单位矩阵. 设

$$SO(n) = \{X \in O(n) || X| = 1\},$$

其中 $|X|$ 记 X 之行列式. 证明: $SO(n)$ 为紧拓扑群. (提示: (1) 设 $X = (x_{ij}) \in O(n)$ 对任意 i, $x_{1i}^2 + \cdots + x_{ni}^2 = (X^tX)_{ii} = 1$, 所以 $|x_{ij}| \leqslant 1$, $O(n)$ 为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的闭有界子集. (2) $SO(n)$ 为 $O(n)$ 的闭子集.) 称 $SO(n)$ 为 n 阶特殊正交群.

2. 引入 2×2 矩阵

$$\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{i}=\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix},\quad \mathbf{j}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{k}=\begin{pmatrix}0&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&0\end{pmatrix}.$$

由全部矩阵 $X=a\mathbf{i}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k},\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 所组成的集合记为 $\mathbb{H}$. 证明: (1) $X=\begin{pmatrix}x&y\\-\overline{y}&\overline{x}\end{pmatrix}$, 其中 $x=a+\sqrt{-1}b,\ \overline{x}=a-\sqrt{-1}d,\ y=c+\sqrt{-1}d$; (2) $\mathbf{i}^2=\mathbf{k}^2=\mathbf{k}^2=-1,\ \mathbf{ij}=-\mathbf{ji}=\mathbf{k}$; (3) $\mathbb{H}$ 是实数域上的 4 维代数. (称 $\mathbb{H}$ 为四元数代数).

3. (1) 若 $X=a\mathbf{i}+b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}$, 则设 $\overline{X}=a\mathbf{i}-b\mathbf{i}-c\mathbf{j}-d\mathbf{k},\ N(X)=a^2+b^2+c^2+d^2$. 以 $\mathrm{T_r}$ 记矩阵的迹, 即对角线上的导数的和. 若 $X,Y\in\mathbb{H}$, 设 $\varphi(X,Y)=\dfrac{1}{2}\mathrm{T_r}(X\overline{Y})$. 证明: $\varphi(X,X)=N(X)$; $N(XY)=N(X)N(Y)$; $X\overline{X}=N(X)\mathbf{i}$.

(2) 在 $\mathbb{R}^4$ 上设 $\nu(a,b,c,d)=a^2+b^2+c^2+d^2$. 证明

$$SO(4)=\{T\in M_4(\mathbb{R})|\ \nu(Tv)=\nu(v),\ \forall v\in\mathbb{R}^4\}.$$

(3) 映射 $\mathbb{H}\to\mathbb{R}^4: X\to(a,b,c,d)$. 用 $Y\in\mathbb{H}$ 定义映射 $\lambda_Y:\mathbb{H}\to\mathbb{H}:X\mapsto YX$. 这样映射 $L_Y:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 由下图决定:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4\\ {\scriptstyle\lambda_Y}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle L_Y}\\ \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{R}^4\end{array}$$

证明: 若 $N(Y)=1$, 则 $L_Y\in SO(4)$.

(4) 设 $\mathbb{H}_0=\{b\mathbf{i}+c\mathbf{j}+d\mathbf{k}:b,c,d\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{H}$. 取 $Y\in\mathbb{H}$. 定义映射 $\gamma_Y:\mathbb{H}\to\mathbb{H}: X\mapsto YXY^{-1}$. 证明: $\gamma_Y(\mathbb{H}_0)\subseteq\mathbb{H}_0$. 利用双射 $\mathbb{H}_0\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}^3$ 及映射 $C_Y:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ 由以下图所决定:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{H}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ {\scriptstyle\gamma_Y}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle C_Y}\\ \mathbb{H}_0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\end{array}$$

证明: 若 $N(Y)=1$, 则 $C_Y\in SO(3)$.

(5) 定义 $SU(2)$ 的元素为 $\begin{pmatrix}u&v\\w&z\end{pmatrix}$, $u,v,w,z\in\mathbb{C}$ 及 $\begin{pmatrix}\overline{u}&\overline{w}\\\overline{v}&\overline{z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u&v\\w&z\end{pmatrix}=1$.

证明: $SU(2)=\{X\in\mathbb{H}|N(X)=1\}$. 在 $\mathbb{R}^4$ 内的单位球面是

$$S^3=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4|a^2+b^2+c^2+d^2=1\}.$$

证明:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -\overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \middle| x = a + \sqrt{-1}b, y = c + \sqrt{-1}d, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \right\}.$$

证明: $SU(2) \approx S^3$.

(6) 证明: $SU(2) \to SO(3) : Y \mapsto C_Y$ 是满同态 (M. Artin, *Algebra*, Chap 9 §9.4 Th9.4.1) 和 $\{1, -1\}$ 是这个同态的核. 于是得同胚 $S^3/\{1, -1\} \approx SO(3)$.

4. 证明 $\mathbb{H}$ 的任一元素可以表达为 $X = z_1 + \mathring{\mathbb{J}} z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. 于是 $\mathbb{H}$ 同构 $\mathbb{C}^2$(线性空间同构). 设有 $Y = a + \mathring{\mathbb{J}} b \in \mathbb{H}$, $a, b \in \mathbb{C}$. 定义 $\lambda_Y : \mathbb{H} \to \mathbb{H} : X \mapsto YX$. 下图决定映射 $l_Y : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ {\scriptstyle \lambda_Y}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle l_Y} \\ \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \end{array}$$

证明: $l_Y \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

5. 一支 $\mathbb{C}^n$ 的旗 (flag) 是指 $\mathbb{C}^n$ 的一个非零子空间序列 V_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, 其中 $V_i \subsetneqq V_{i+1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 即一支旗是 $(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n)$ $(V_n = \mathbb{C}^n)$. 由 $\mathbb{C}^n$ 的全部旗所组成的集合记作 F. 设 $G = \{g \in M_n(\mathbb{C}) | \det g \neq 0\}$ ($\det g$ 是 g 的行列式). 证明:

$$G \times F \to F : g, (V_1 \subset \cdots \subset V_n) \mapsto (gV_1 \subset \cdots \subset gV_n)$$

是一个群作用. 设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的标准基底 $(e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots)$. 由 $e_1, \cdots, e_j$ 所生成的子空间记作 U_j. 设 $B = \{g \in G : (gU_1 \subset \cdots \subset gU_n) = (U_1 \subset \cdots \subset U_n)\}$.

证明: B 为上三角矩阵群, 即 $b = (b_{ij}) \in B$, 则 $b_{ij} = 0$, $i > j$.

定义映射

$$\varphi : G \to F : g \mapsto (gU_1 \subset \cdots \subset gU_n).$$

证明: φ 是满射, 且从 φ 所诱导出的映射

$$G/B \to F : gB \mapsto (gU_1 \subset \cdots \subset gU_n)$$

是双射.

在 G/B 上取商拓扑. 利用此双射决定 F 的拓扑.

证明: F 是齐性空间.

6. 公式 $\left\langle \sum u_j e_j, \sum v_j e_j \right\rangle = \sum u_j \overline{v}_j$ 决定 $\mathbb{C}^n$ 的内积. 设 $U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}) |$ 对任意 $u, v \in \mathbb{C}^n$ 有 $\langle gu, gv \rangle = \langle u, v \rangle\}$. F 为 $\mathbb{C}^n$ 的旗所组成的空间. 证

明: 取任意旗 $(V_1 \subset \cdots \subset V_n) \in F$, 则存在 $n \times n$ 复矩阵 g 使得 $gU_j = V_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ 和 $\{ge_1, \cdots, ge_n\}$ 是 $(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 的法正交基及可以选 $g \in U(n)$. 设

$$T = \{g \in U(n) : (gU_1 \subset \cdots \subset gU_n) = (U_1 \subset \cdots U_n)\}.$$

证明: 如果 $t = (t_{ij}) \in T$, 则 t 为对角矩阵, 即若 $i \neq j$ 则 $t_{ij} = 0$. 另外, 有双射 $U(D)/T^n \overset{\approx}{\to} F$ 和 F 是紧空间.

7. 设

$$SL_2\mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R};\ ad - bc = 1 \right\},$$

$$sl_2\mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R};\ a + d = 0 \right\};$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

证明: $\{X, Y, H\}$ 是三维向量空间 $sl_2\mathbb{R}$ 的基底. 取 $L \in sl_2\mathbb{R}$, $f \in C^\infty(G)$. 设

$$(\partial(L)f)(x) = \frac{d}{dt} f(x \exp(tL))|_{t=0}, \quad x \in G.$$

证明: $\partial(L)$ 是微分算子. 取 $L_1, \cdots, L_r \in sl_2\mathbb{R}$, 设

$$(\partial(L_1 \cdots L_r)f)(x) = \frac{\partial^r}{\partial t_1 \cdots \partial t_r} f(x \exp t_1 L_1 \cdots \exp t_r L_r)|_{t_j=0}.$$

证明：微分算子关系: $\partial(L_1 L_2) = \partial(L_1)\partial(L_2)$.

设

$$u_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad a_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

并设

$$\Omega = \frac{1}{\sinh^2 2t} \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta_2^2} \right) - 2\frac{\cosh 2t}{\sinh^2 2t} \frac{\partial^2}{\partial\theta_1 \partial\theta_2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\frac{\cosh 2t}{\sinh 2t} \frac{\partial}{\partial t} + 1.$$

证明: $\partial\left((H+1)^2 + 4YX\right) f\left(u_{\theta_1} u_t u_{\theta_2}\right) = \Omega f$.

8. (1) 设 $f\left(u_{\theta_1} a_t u_{\theta_2}\right) = e^{i(m\theta_1 + n\theta_2)} f_1(t)$ 和 $\Omega_1 = \dfrac{d^2}{dt^2} + 2\dfrac{\cosh 2t}{\sinh 2t}\dfrac{d}{dt} + q_1$, $q_1 = 1 - \dfrac{m^2 + n^2 - 2mn\cosh 2t}{\sinh^2 2t}$. 证明: $\Omega f = e^{i(m\theta_1 + n\theta_2)} \Omega_1 f_1$.

(2) 设 $f_2(t)=(\sinh 2t)^{\frac{1}{2}}f_1(t)$, $q_2=\sinh^{-2}2t\cosh^2 2t-2+q_1$, $\Omega_2=\dfrac{d^2}{dt^2}+q_2$. 证明:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left((\sinh 2t)^{-\frac{1}{2}}\right)=-(\sinh 2t)^{-\frac{3}{2}}\cosh 2t,\\
&\frac{d}{dt}f_1=-(\sinh 2t)^{-\frac{3}{2}}(\cosh 2t)f_2+(\sinh 2t)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}f_2,\\
&\frac{d^2}{dt^2}f_1=3(\sinh 2t)^{-\frac{5}{2}}\cosh^2 2tf_2-2(\sinh 2t)^{-\frac{1}{2}}f_2\\
&\qquad\quad-2(\sinh 2t)^{-\frac{3}{2}}\cosh 2tf_2+(\sinh 2t)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2}{dt^2}f_2,\\
&\Omega_1 f_1=(\sinh 2t)^{-\frac{1}{2}}\Omega_2 f_2.
\end{aligned}$$

(3) 换元 $u=\cosh 2t$, 则 $\sinh 2t=u^2-1$ 和 $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d}{du}\right)=\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{d}{du}\right)\dfrac{du}{dt}$.

证明: 在换元下, 算子 $\dfrac{d^2}{dt^2}$ 换为 $4\left(u^2-1\right)\dfrac{d^2}{du^2}+4u\dfrac{d}{du}$, 并且特征方程 $\Omega_2 f_2=k^2 f_2$ 换为

$$\frac{d^2g}{du^2}+\frac{u}{u^2-1}\frac{dg}{du}+\frac{Q(u)}{\left(u^2-1\right)^2}g=0,$$

其中 $Q(u)=u^2-\left(1+k^2\right)\left(u^2-1\right)+2mnu-m^2-n^2$.

(在习题 8 中, 我们算出 $SL_2\mathbb{R}$ 的 Casmir 算子特征方程是超几何方程 —— hypergeometric equation([WG 65])).

第6章 群 代 数

定义在拓扑群 G 上各类形的函数可以用来构造出各种赋范代数. 用这些拓扑代数来研究 G 的性质便是本章的内容了.

6.1 群代数表示

用算子代数理论来研究拓扑群的函数和测度所生成的拓扑代数的表示, 便得到拓扑群的表示的性质.

6.1.1 Banach 代数的表示

如果代数 $\mathscr{A}$ 同时亦是 Banach 空间, 而且范数满足不等式 $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$, $(x, y \in \mathscr{A})$, 则称 $\mathscr{A}$ 为 Banach 代数 ([ZL 08] 第五章). 如果复数域上的 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 有对合映射 $x \mapsto x^*$ 满足以下条件:

(i) $(ax+by)^* = ax^* + by^*$, $(a, b \in \mathbb{C})$,

(ii) $(xy)^* = y^* x^*$,

(iii) $(x^*)^* = x$,

(iv) $\|x^*\| = \|x\|$,

则称 $\mathscr{A}$ 为 $*$-Banach 代数. 如果 $\exists e \in \mathscr{A}$ 满足条件: $x \in \mathscr{A} \Rightarrow ex = xe = x$, 则称 $\mathscr{A}$ 是有单位元的. 本节中, 如不加声明, $\mathscr{A}$ 都是指有单位元的 $*$ Banach 代数.

如果 H 是 Hilbert 空间, 则以 $\mathscr{L}(H)$ 记 H 的所有有限算子的全体. 算子 A 的范数

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Av\|}{\|v\|} \,\middle|\, v \in H,\ v \neq 0\right\}.$$

$\mathscr{L}(H)$ 是 $*$ Banach 代数. 如果存在代数同态 $\Pi : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(H)$, 使得对 $x \in \mathscr{A}$, 有 $(\Pi(x))^* = \Pi(x^*)$, 则称 Π 为 $\mathscr{A}$ 的 $*$ 表示; 如果 $\Pi(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, 则称 Π 为忠实表示.

设 H 有子空间 H_1, 使得 $x \in \mathscr{A} \Rightarrow \Pi(x)(H_1) \subseteq H_1$, 则称 H_1 为 Π 的不变子空间. 如果除 H 和 0 外 Π 没有其他的闭不变子空间, 则称 Π 为不可约的.

本节的主要结果是: 如果 $*$ Banach 代数有忠实的 $*$ 表示, 则 $\mathscr{A}$ 有充分多不可约 $*$ 表示. 确切地说, 就是对 $\mathscr{A}$ 中任意非零元 x, 存在不可约表示 Π, 使得 $\Pi(x) \neq 0$.

命题 6.1.1　已给有单位元的 $*$ Banach 代数 $\mathscr{A}$ 的 $*$ 表示 (Π, H), 设

$$C(\Pi)=\{A\in\mathscr{L}(H)|A\Pi(x)=\Pi(x)A,\ \forall x\in\mathscr{A}\}.$$

则 Π 不可约 $\Leftrightarrow C(\Pi)=\mathbb{C}$.

证明　设 H_1 是 H 的闭子空间, $P: H\to H_1$ 是正交投射, 则 H_1 是 Π 的不变子空间 $\Leftrightarrow P\in C(\Pi)$.

"$\Leftarrow$": 设 $H_1\neq 0$, 是闭不变子空间, 则 $C(\Pi)=\mathbb{C}\Rightarrow P=I\Rightarrow H=H_1$.

"$\Rightarrow$": 设 Π 不可约, 取 $B\in C(\Pi)$, 将 B 写为 $B=B_1+iB_2$, 其中 B_1, B_2 是 Hermite 算子, 则 $B_1, B_2\in C(\Pi)$, 故可假设 B 是 Hermite 算子. 用谱定理

$$B=\int\lambda dE(\lambda),$$

其中 $E(\lambda)\in C(\Pi)$, 并且 $\lambda\mapsto(E(\lambda)v, v)$ 是单调非减函数. Π 不可约 $\Rightarrow E(\lambda)=0$ 或 $I\Rightarrow\exists\lambda_0$, 使得 $\lambda<\lambda_0\Rightarrow F(\lambda)=0$, 而 $\lambda>\lambda_0$, 所以 $E(\lambda)=I$. 这样

$$B=\int\lambda dE(\lambda)=\lambda_0 I.$$

□

设 $\mathscr{A}$ 有 $*$ 表示 (Π_α, H_α). 定义

$$H=\left\{(v_\alpha)\middle|v_\alpha\in H_\alpha,\ \sum_\alpha\|U_\alpha\|^2<\infty\right\}.$$

对 $x\in\mathscr{A}$, $(v_\alpha)\in H$, 定义

$$\Pi(x)(v_\alpha)=(\Pi_\alpha(x)v_\alpha).$$

称 Π 为 Π_α 的直和, 并记为 $\Pi=\bigoplus_\alpha\Pi_\alpha$, $H=\bigoplus H_\alpha$.

已给 $\mathscr{A}$ 的 $*$ 表示 (Π, H). 设

$$\mathfrak{N}(\Pi)=\{v\in H|\Pi(x)v=0,\forall x\in\mathscr{A}\}.$$

如果 $\mathfrak{N}(\Pi)=0$, 则说 Π 是非退化表示. 任何表示都是非退化表示与平凡表示的直和: $\Pi=\Pi_1\bigotimes\Pi_2$, 其中 $\Pi_1=\Pi|_{\mathfrak{N}(\pi)^\perp}$, $\Pi_2=\Pi|_{\mathfrak{N}(\pi)}$.

我们说两个非退化 $*$ 表示 (Π, H), (Π', H') 等价, 如果存在酉算子 $T: H\to H'$, 使得 $\Pi'T=T\Pi$. 称两个任意的 $*$ 表示是等价的, 如果它们的非退化部分是等价的.

如果对 $\mathscr{A}$ 的 $*$ 表示 (Π, H) 存在 $v\in H$, 使得 $\{\Pi(x)v|x\in\mathscr{A}\}$ 是 H 的稠密子集, 则称 Π 为循环表示, v 为 Π 的循环向量.

不难证明

命题 6.1.2　$*$ 表示必等价于循环表示的直和. □

设 f 是 $*$ 代数 $\mathscr{A}$ 的连续线性函数. 如果 $\forall x \in \mathscr{A}$, 有 $f(x^*x) \geqslant 0$, 则称 f 为正泛函. 设 g 是 $\mathscr{A}$ 的连续线性函数, 若存在正泛函 h_i 和常数 a_i, b_i, 使得 $g = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$ 及 $b_i f - h_i$ 是正泛函, 我们说 $f \succ g$. 设

$$C(f) = \{g|\text{(i) } g \text{ 是 } A \text{ 的连续线性函数, (ii) } f \succ g\}.$$

若 $C(f) = \{af|a \in \mathbb{C}\}$, 则称 f 是不可分解正泛函.

定理 6.1.1(Gelfond-Naimark-Segel)　已给有单位元的 $*$ Banach 代数 $\mathscr{A}$. 那么, 有

(1) 如果 (Π, H) 是 $\mathscr{A}$ 的 $*$ 表示, 则对任意 $v \in H$, $x \mapsto (\Pi(x)v, v)$ 是正泛函.

(2) 如果 f 是 $\mathscr{A}$ 的正泛函, 则 $\mathscr{A}$ 有循环 $*$ 表示 Π 和循环向量 v, 使得 $f(x) = (\Pi(x)v, v)$. 若另有 $\mathscr{A}$ 的循环表示 Π' 和循环向量 v', 使得 $f(x) = (\Pi'(x)v', v')$, 则 Π 与 Π' 等价.

(3) 如果 (Π, H) 是 $\mathscr{A}$ 的非零循环 $*$ 表示, v 是 Π 的循环向量, $f(x) = (\Pi(x)v, v)$, 对 $B \in \mathscr{L}(H)$, 取 $f_B(x) = (B\Pi(x)v, v)$, 则

$$C(\Pi) \to C(f)$$
$$B \mapsto f_B$$

是同构.

(4) $*$ 表示 Π 是不可约的充要条件是 Π 是循环表示及循环向量 v 所决定的正泛函 $f(x) = (\Pi(x)v, v)$ 是不可分解的.

(5) 如果 f 是 $\mathscr{A}$ 的不可分解正泛函, 则 $\mathscr{A}$ 有不可约 $*$ 表示 (Π, H), 使得 $f(x) = (\Pi(x)v, v)$, $v \in H$.

证明　(1) 显然有

$$f(x^*x) = (\Pi(x^*x)v, v) = (\Pi(x)v, \Pi(x)v) \geqslant 0.$$

(2) 令

$$I = \{z \in \mathscr{A}|f(z^*z) = 0\}.$$

利用下述不难证明的等式及不等式:

$$\overline{f(y^*x)} = f(x^*y),$$
$$|f(y^*x)|^2 \leqslant f(x^*x)f(y^*y),$$
$$f[(x+z)^*(x'+z')] = f(x^*x'), \quad (z, z' \in I),$$

容易验证 I 是 $\mathscr{A}$ 的左理想, 而且可以在 $\mathscr{A}/I\times\mathscr{A}/I$ 上定义函数: $(x+I,y+I)=f(y^*x)$. 不难证明它是 $\mathscr{A}/I$ 的内积. 设 H 为 $\mathscr{A}/I$ 对此内积完备化所得的 Hilbert 空间.

对 $x\in\mathscr{A}$, 引进 $\mathscr{A}/I$ 上的算子: $\Pi(x)(y+I)=xy+I$. 对 $y\in\mathscr{A}$, 设 $f_y(x)=f(y^*xy)$, 则

$$f_y(x^*x)=f(y^*x^*xy)=f((xy)^*xy)\geqslant 0.$$

所以 $\|f_y\|=f_y(e)$. 于是

$$\begin{aligned}(\Pi(x)(y+I),\Pi(x)(y+I))&=(xy+I,xy+I)=f((xy)^*(xy))\\&=f_y(x^*x)\leqslant\|x^*x\|f_y(e)\leqslant\|x\|^2f(y^*y)=\|x\|^2(y+I,y+I).\end{aligned}$$

故 $\|\Pi(x)\|\leqslant\|x\|$, 即 Π 是有界算子. 于是可将 Π 扩张为 H 上的有界算子, 仍记为 $\Pi(x)$. 令 $v=e+I$, 则

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}/I=\{\Pi(x)v|x\in\mathscr{A}\},\\&f(x)=f(e^*x)=(x+I,e+I)=(\Pi(x)v,v).\end{aligned}$$

显然 (Π,H) 是所求的表示.

如果有 $\mathscr{A}$ 的表示 (Π',H') 及 $v'\in H'$, 使得

$$(\Pi(x)v,v)=(\Pi'(x)v',v').$$

以 x^*x 代替 x, 得到

$$(\Pi(x)v,\Pi(x)v)=(\Pi'(x)v',\Pi'(x)v').$$

在 $\mathscr{A}/I$ 上定义的算子

$$T:\Pi(x)v\mapsto\Pi'(x)v',$$

可扩张为 $T:H\to H'$, 它是酉算子. 显然

$$T\Pi(x)T^{-1}(\Pi'(y)v')=\Pi'(x)\Pi'(y)v'.$$

(3) 证明分为三个步骤:

(i) $B\in C(\Pi)\Rightarrow f_B\in C(f)$. 因为 $B=B_1+iB_2$, $B_1=\dfrac{1}{2}(B+B^*)$, $B_2=\dfrac{1}{2i}(B-B^*)$, B_1,B_2 都是 Hermite 算子, 另外, 又有表示$B_1=B_1^+-B_1^-$, $B_2=B_2^+-B_2^-$, $B_i^{\pm}\geqslant 0$ $(i=1,2)$, 所以可假设 $B\geqslant 0$, 即 $(Bu,u)\geqslant 0$, $\forall u$. 因此

$$\begin{aligned}&f_B(x^*x)=(B\Pi(x^*x)v,v)=(B\Pi(x)v,\Pi(x)v)\geqslant 0,\\&0\leqslant(B\Pi(x)v,\Pi(x)v)\leqslant\|B\|(\Pi(x)v,\Pi(x)v)=\|B\|f(x^*x).\end{aligned}$$

可见 f_B 与 $\|B\|f - f_B$ 都是正泛函, 所以 $f_B \in C(f)$.

(ii) $B \to f_B$ 是满映射. 设 $g \in C(f)$, 则 $g = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$, h_i 是正泛函, $f \succ h_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 所以可假设 g 和 $bf - g$ 是正泛函. 因为 $\Pi(x) = 0 \Rightarrow f(x^*x) = 0 \Rightarrow g(x^*x) = 0 \Rightarrow g(x^*y) = 0$, 所以可在 $\{\Pi(x)v\}$ 上引入 $(*,*)_g$ 如下: $(\Pi(x)v, \Pi(y)v)_g = g(y^*x)$. 因为

$$\begin{aligned}
&|(\Pi(x)v, \Pi(y)v)_g| \leqslant g(x^*x)g(y^*y) \leqslant b^2 f(x^*x)f(y^*y) = b^2\|\Pi(x)v\|^2\|\Pi(y)v\|^2, \\
&(\Pi(x)v, \Pi(y)v)_g = \overline{(\Pi(y)v, \Pi(x)v)_g}, \\
&(\Pi(x)v + \Pi(y)v, \Pi(z)v)_g = (\Pi(x)v, \Pi(z)v)_g + (\Pi(y)v, \Pi(z)v)_g.
\end{aligned}$$

v 是循环向量, 所以可把 $(*,*)_g$ 扩张为 H 的内积. 按 Riesz 定理, 存在 $B \in \mathscr{L}(H)$, 使得

$$\begin{aligned}
&(Bu, w) = (u, w)_g, \\
&(B\Pi(x)v, \Pi(x)v) = g(x^*x) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

因此 $B \geqslant 0$. 计算

$$\begin{aligned}
(B\Pi(x)\Pi(y)v, \Pi(z)v) &= (B\Pi(xy)v, \Pi(z)v) = g(z^*xy) = g((x^*z)^*y) \\
&= (B\Pi(y)v, \Pi(x^*z)v) = (\Pi(x)B\Pi(y)v, \Pi(z)v).
\end{aligned}$$

这说明 $B\Pi = \Pi B$, 即 $B \in C(\Pi)$. 最后 $\Pi(e)\Pi(x)v = \Pi(x)v \Rightarrow \Pi(e) = I \Rightarrow g(x) = g(e^*x) = (B\Pi(x)v, \Pi(e)v) = (B\Pi(x)v, v) = f_B(x)$. 这就证明了, 对任给 $g \in C(f)$, 存在 $B \in C(\Pi)$, 使得 $f_B = g$.

(iii) $B \mapsto f_B$ 是单映射. 若有 $B, C \in C(\Pi)$, 使得 $f_B = f_C$, 则

$$\begin{aligned}
(B\Pi(x)v, \Pi(y)v) &= (\Pi(y)^*B\Pi(x)v, v) = (B\Pi(y^*x)v, v) \\
&= f_B(y^*x) = f_c(y^*x) = (C\Pi(x)v, \Pi(y)v).
\end{aligned}$$

□

所以 $B = C$.

定理 6.1.1 有时被简称为 GNS 定理.

命题 6.1.3 $\mathscr{A}$ 为有单位元的 $*$Banach 代数. 设 $0 \neq x \in \mathscr{A}$. 如果有正泛函 f, 使得 $f(x^*x) > 0$, 则存在 $\mathscr{A}$ 的不可约 $*$ 表示 Π, 使得 $\Pi(x) \neq 0$.

证明 设 $H(\mathscr{A}) = \{x \in \mathscr{A} | x^* = x\}$, 则 $H(\mathscr{A})$ 是实数 $\mathbb{R}$ 上的 Banach 空间. f 是 $\mathscr{A}$ 的正泛函 $\Rightarrow f(H(\mathscr{A})) \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow f \in H(\mathscr{A})^*$ (实 Banach 空间 $H(\mathscr{A})$ 的对偶空间). 设 $K = \{f | f$ 正泛函, $f(e) = 1\}$, $\Sigma = \{h \in H(\mathscr{A})^* | \|h\| = 1\}$, 则 K 是 Σ 的闭凸集, 而 Σ 对 $H(\mathscr{A})^*$ 的弱 $*$ 拓扑是紧集.

可以假设已给的正泛函 f 满足条件: $f \in K$ 且 $f(x^*x) > 0$. 设 $K_0 = \{h_0 \in K | k_0(x^*x) = \sup\limits_{k\in K} k(x^*x)\}$, 则对弱 $*$ 拓扑, K_0 是 $H(\mathscr{A})^*$ 的凸紧子集. 所以 K_0 有端点 f_0(Крейн-Мильман定理). 我们来证明 f_0 是不可分解的: 取正泛函 $h \neq 0$, $h \in K_0$ 及 $b > 0$, 使得 $g = bf_0 - h$ 是正泛函. 如果 $g = 0$, 则 $h = bf_0$. 如果 $g \neq 0$, 则 $f_0 = \dfrac{1}{b}h + \dfrac{\|g\|}{b} \cdot \dfrac{g}{\|g\|}$. 但是 $\|g\| > 0$, $\|g\| = g(e) = bf_0(e) - h(e) = b - 1$, 所以 $0 < \dfrac{1}{b} < 1$. $h \in K_0$, $\dfrac{g}{\|g\|} \in K_0$, $f_0 = \dfrac{1}{b}h + \left(1 - \dfrac{1}{b}\right)\dfrac{g}{\|g\|}$ 是端点, 这是不可能的, 故得到矛盾. 因此 $C(f_0) = \{af_0 | a \in \mathbb{C}\}$.

由 GNS 定理, 可知有不可约 $*$ 表示 Π 及循环向量 v, 使得 $f_0(y) = (\pi(y)v, v)$, 则

$$\|\Pi(x)v\|^2 = (\Pi(x)v, \Pi(x)v) = f_0(x^*x) = \sup_{f_1\in K} f_1(x^*x) \geqslant f(x^*x) > 0.$$

故有 $\Pi(x) \neq 0$. □

命题 6.1.4　如果有单位元的 $*$ Banach 代数 $\mathscr{A}$ 有忠实表示, 则对任意 $0 \neq x \in \mathscr{A}$ 存在不可约表示 Π, 使得 $\Pi(x) \neq 0$.

证明　把 $\mathscr{A}$ 的忠实表示写为循环表示的直和, 所以, 对 $x \neq 0$, 有循环表示 Π', 使得 $\Pi'(x) \neq 0$. 设 v' 是 Π' 的循环向量, 取 $f(x) = (\Pi'(x)v', v')$, 则 $f(x^*x) > 0$, f 是正泛函. 故从命题 6.1.3 可知所求的表示存在. □

6.1.2　群代数

设 G 是局部紧拓扑群. 在 G 上固定左不变 Haar 测度. 定义在 G 上的复值可测函数所生成的线性空间记为 $L^1(G)$. 对 $f \in L^1(G)$, 取范数

$$\|f\| = \int_G |f(x)| dx.$$

对此范数 $L^1(G)$ 是 Banach 空间. 取 $f, g \in L^1(G)$, 可定义卷积

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy.$$

不难证明以下性质:

(1) $\|f\| \geqslant 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$,

(2) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$,

(3) $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

(4) $\|f * g\| \leqslant \|f\|\|g\|$.

所以对加法和卷积乘法, $L^1(G)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的线性结合代数. 而且对范数 $\|\cdot\|$ 是完备的. $L^1(G)$ 是 Banach 代数. 我们将证明这个由 G 所决定的群代数的表示与 G 的表示有 1-1 对应关系.

对 $f \in L^1(G)$, 定义 f^* 如下: $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$, 其中 Δ 是 G 的模函数. 则 $f^* \in L^1(G)$, 并且有以下性质: $(f^*)^* = f$; $(f+g)^* = f^*+g^*$; $(\alpha f)^* = \overline{\alpha} f^*(\alpha \in \mathbb{C})$; $(f * g)^* = g^* * f^*$. 现在我们只证明最后一项:

$$\begin{aligned}(f * g)^*(x) &= \overline{f * g}(x^{-1})\Delta(x^{-1}) \\ &= \int_G \overline{f}(y)\overline{g}(y^{-1}x^{-1})\Delta(x^{-1})dy \\ &= \int_G \overline{g}((xy)^{-1})\Delta((xy)^{-1})\overline{f}(y)\Delta(y)dy \\ &= \int_G g^*(xy)f^*(y^{-1})dy = (g^* * f^*)(x).\end{aligned}$$

所以 $L^1(G)$ 是 $*$ Banach 代数. 常称它为 G 的群代数.

设 A 是有向集 (即有偏序 $\leqslant$, 而且对 $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, 存在 $\alpha_3 \in A$ 使得 $\alpha_1 \leqslant \alpha_3$, $\alpha_2 \leqslant \alpha_3$, $f : A \to \mathbb{C}$, 我们说 $\lim\limits_a f(\alpha) = a$, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha \in A$, 使得 $\alpha \geqslant \alpha_0 \Rightarrow |f(\alpha) - a| < \varepsilon$. 称集 $\{u_\alpha\} \subseteq L^1(G)$ 为近似单位, 如果 $\forall f \in L^1(G)$, 有 $\lim\limits_\alpha \|f * u_\alpha - f\| = 0$, 及

$$\lim_\alpha \|u_\alpha * f - f\| = 0.$$

命题 6.1.5 $L^1(G)$ 有近似单位.

证明 设 $\{N_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 G 的单位元 e 的一个紧邻域基. 设 $\alpha_2 \leqslant \alpha_1$, 若 $N\alpha_1 \subseteq N\alpha_2$. 取非负连续函数 u_α, 使得 $\mathrm{supp}(u_\alpha) \subseteq N_\alpha$, $\int_G u_\alpha(x)dx = 1$. 则对 $f \in L^1(G)$, 成立

$$f(x) = \int_G f(x)u_\alpha(y)dy.$$

所以,

$$\begin{aligned}\|u_\alpha * f - f\| &= \int_G \left|\int_G u_\alpha(y)f(y^{-1}x)dy - f(x)\right| dx \\ &= \int_G \left|\int_G u_\alpha(y)[f(y^{-1}x) - f(x)]dy\right| dx \\ &\leqslant \int_G \int_G \Big| u_\alpha(y)\|f(y^{-1}x) - f(x)\|dydx \\ &= \int_G \|f_y - f\|u_\alpha(y)dy = \int_{N_\alpha} \|f_y - f\|u_\alpha(y)dy,\end{aligned}$$

其中

$$f_y(x) = f(y^{-1}x).$$

现来证明 $G \to L^1(G)$, $y \mapsto f_y$ 是连续映射. 已给 $\varepsilon > 0$, 存在 $g \in C_c(G)$, 使得 $\|f - g\| < \varepsilon$. 因为 g 一致连续, 所以存在单位元的邻域 N, 使得 $y'y^{-1} \in N \Rightarrow$

$\|g_{y'} - g_y\| < \varepsilon$. 于是对 $y'y^{-1} \in N$, 有

$$\|f_{y'} - f_y\| \leqslant \|f_{y'} - g_{y'}\| + \|g_{y'} - g_y\| + \|g_y - f_y\| < 3\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{y\to e} \|f_y - f\| = 0$. 可取 α_0, 使得 $\alpha \geqslant \alpha_0$, $y \in N_\alpha \Rightarrow \|f_y - f\| < \varepsilon$. 于是

$$\|u_\alpha * f - f\| < \varepsilon \int u_\alpha(y)dy = \varepsilon.$$

因为 $\{N_\alpha^{-1}\}$ 亦是单位元 e 的一个紧邻域基, 而且 $\operatorname{supp}(u_\alpha^*) \subseteq N_\alpha^{-1}$, $u_\alpha^* \geqslant 0$, $\|u_\alpha^*\| = \|u_\alpha\| = -1$. 这样

$$\|u_\alpha^* * f - f\| \to 0,$$

并且

$$\|f * u_\alpha - f\| = \|(f * u_\alpha - f)^*\| = \|(f * u_\alpha)^* - f^*\| = \|u_\alpha^* * f^* - f^*\| \to 0. \quad \square$$

设 H 为 Hilbert 空间, $\mathscr{L}(H)$ 为 H 的有界算子代数, 称 $*$- 代数同态 $\Pi : L^1(G) \to \mathscr{L}(H)$ 为 $L^1(G)$ 在 H 中的 $*$ 表示, 如果

$$\Pi(f+g) = \Pi(f) + \Pi(g), \quad \Pi(\alpha f) = \alpha \Pi(f),$$
$$\Pi(f * g) = \Pi(f)\cdot\Pi(g), \quad \Pi(f^*) = \Pi(f)^*,$$

其中 $\alpha \in \mathbb{C}$, $\Pi(f)^*$ 是算子 $\Pi(f)$ 的共轭算子. 设 $\mathfrak{N}(\Pi) = \{v \in H | \Pi(f)v = 0,\ \forall f \in L^1(G)\}$. 若 $\mathfrak{N}(\Pi) = 0$, 则称表示 Π 为非退化表示.

引理 6.1.1　设 $\Pi : L^1(G) \to \mathscr{L}(H)$ 为非退化 $*$ 表示, 以 H_1 记由 $\{\Pi(f)v | f \in L^1(G),\ v \in H\}$ 所生成的闭子空间, 则 $H_1 = H$.

证明　记 $H_1^\perp = H_2$. 因为 $\Pi(g)(\Pi(f)v) = \Pi(g * f)v$, 所以 $\Pi(L^1(G))H_1 \subseteq H_1$. 因此 $\Pi(L^1(G))H_2 \subseteq H_2$. 取 $v \in H_2$, 则 $\Pi(f)v \in H_1 \bigcap H_2 = \{0\}$, $\forall f \in L^1(G)$. 所以 $v \in \mathfrak{N}(\Pi)$, 可见 $H_2 = 0$, 即 $H_1 = H$. □

引理 6.1.2　$f, g \in L^1(G)$, $x \in G$, 则 $(g_x)^* * f_x = g^* * f$.

证明

$$\begin{aligned}(g_x)^* * f_x(y) &= \int g_x^*(z) f_x(z^{-1}y)dz = \int \overline{g}_x(z^{-1})\Delta(z^{-1}) f_x(z^{-1}y)dz \\ &= \int \overline{g}_x(z) f_x(zy)dz = \int \overline{g}(z) f(zy)dz \\ &= \int g^*(z) f(z^{-1}y)dz = (g^* * f)(y).\end{aligned}$$

□

引理 6.1.3 $\Pi: L^1(G) \to \mathscr{L}(H)$ 是 $*$ 表示, $\sum_{i=1}^{n} \Pi(f_i)v_i = 0$, 则对一切 $x \in G$, 有 $\sum_{i=1}^{n} \Pi((f_i)_x)v_i = 0$.

证明

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \Pi(f_i)v_i,\ \sum_{i=1}^{n} \Pi(f_i)v_i \right\rangle = \sum_{i,j} \langle \Pi(f_i)v_i,\ \Pi(f_j)v_j \rangle \\ &= \sum_{i,j} \langle \Pi(f_j^* * f_i)v_i,\ v_j \rangle = \sum_{i,j} \langle \Pi((f_j)_x^* * (f_i)_x)v_i,\ v_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_i \Pi((f_i)_x)v_i,\ \sum_i \Pi((f_i)_x)v_i \right\rangle. \end{aligned}$$

□

定理 6.1.2 G 是局部紧群. 以 $\hat{G}$ 记 G 的连续不可约酉表示所组成的集合. 以 $\widehat{L_1(G)}$ 记 $L^1(G)$ 的非退化不可约 $*$ 表示所组成的集合. 则存在双射 $\hat{G} \longleftrightarrow \widehat{L^1(G)}$: $\pi \longleftrightarrow \Pi$, 使得若 $f \in L^1(G)$, 则 $\Pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)dx$; 若 $x \in G$, $f \in L^1(G)$, 则 $\pi(x)\Pi(f) = \Pi(f_x)$.

注 对 $v \in H$, 可以把 $\int_G f(x)\pi(x)v dx$ 看成向量值函数的 Bochner 积分, 见 [HP 57], (3.7.3) 或 [Xia 09].

证明 (1) 已给 $(\pi, H) \in \hat{G}$, 固定 $u, v \in H$, 则 $x \mapsto \langle \pi(x)u, v\rangle$ 是连续, 而且 $\pi(x)$ 是酉算子 $\Rightarrow |\langle \pi(x)u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$. 故对 $f \in L^1(G)$, 有

$$\int_G f(x)\langle \pi(x)u, v\rangle dx < \infty.$$

对固定的 $f, (u, v) \mapsto \int f(x)\langle \pi(x)u, v\rangle dx$ 是 H 上的有界双线性泛函. 这是因为

$$\left| \int f(x)\langle \pi(x)u, v\rangle dx \right| \leqslant \|f\|\|u\|\|v\|.$$

由 Riesz 表示定理, 存在算子 $\Pi(f)$, 使得 $\|\Pi(f)\| \leqslant \|f\|$, 且 $\forall u, v \in H$,

$$\langle \Pi(f)u, v\rangle = \int f(x)\langle \pi(x)u, v\rangle dx.$$

显然 $f \mapsto \Pi(f)$ 是线性映射, Π 是连续的.

$$\begin{aligned}\Pi(f*g) &= \int f*g(x)\pi(x)dx = \iint f(y)g\left(y^{-1}x\right)\pi(x)dydx \\ &= \int f(y)\pi(y)\left\{\int g\left(y^{-1}x\right)\pi\left(y^{-1}x\right)dx\right\}dy \\ &= \Pi(f)\Pi(g), \\ \langle\Pi(f^*)u,v\rangle &= \int f^*(x)\langle\pi(x)u,v\rangle dx \\ &= \int \overline{f}\left(x^{-1}\right)\Delta\left(x^{-1}\right)\langle\pi(x)u,v\rangle dx \\ &= \int \overline{f}\left(x^{-1}\right)\langle u,\pi\left(x^{-1}\right)v\rangle\Delta\left(x^{-1}\right)dx \\ &= \int \overline{f}\left(x^{-1}\right)\overline{\langle\pi\left(x^{-1}\right)v,u\rangle}\Delta\left(x^{-1}\right)dx \\ &= \int \overline{f}(x)\overline{\langle\pi(x)v,u\rangle}dx \\ &= \overline{\langle\Pi(f)v,u\rangle} = \langle\Pi(f)^*u,v\rangle,\end{aligned}$$

即 $\Pi(f^*)=\Pi(f)^*$, 所以 $f\mapsto\Pi(f)$ 是 $L^1(G)$ 的 $*$ 表示. 设 $\forall f\in L^1(G)$, $\Pi(f)v=0$, 则

$$0=\langle\Pi(f)v,u\rangle=\int f(x)\langle\pi(x)v,u\rangle dx.$$

故 $x\mapsto\langle\pi(x)v,u\rangle$ 几乎处处为 0. 所以 $\pi(x)v=0$, 即 $v=0$. 这便证明了 Π 是非退化. 由此可见, 从 $\pi\in\hat{G}$ 可得 $\Pi\in\widehat{L^1(G)}$, Π 由公式

$$\Pi(f)=\int f(x)\pi(x)dx$$

决定.

(2) 已给 $\Pi\in L^1(G)$, 以 H_0 记 $\{\Pi(f)v|f\in L^1(G),\ v\in H\}$ 生成的子空间. 由引理 6.1.3, 对 $x\in G$, 可以定义 $\pi(x):H_0\to H_0$ 如下:

$$\pi(x)\left(\sum_{i=1}^{n}\Pi(f_i)v_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\Pi((f_i)_x)v_i.$$

同时从引理 6.1.3 的证明可见 $\pi(x)^*=\pi(x)^{-1}$, 所以 $\pi(x)$ 可以扩张至闭包 $\overline{H}_0=H$, $f_{xy}=(f_y)_x\Rightarrow\pi(xy)=\pi(x)\pi(y)$. 从 $*$ Banach 代数的 $*$ 表示理论知 $\|\Pi(f)\|\leqslant\|f\|$, 加上 $G\to L^1(G)$, $x\mapsto f_x$ 是连续, 所以存在是连续表示.

(3) 设 $\pi\in\hat{G}$, 由 (1), (2) 可知有映射 $\pi\to\Pi$, $\Pi\to\rho\in\hat{G}$. 则

$$\begin{aligned}\pi(x)\Pi(f) &= \pi(x)\int f(y)\pi(y)dy=\int f(y)\pi(xy)dy=\int f\left(x^{-1}y\right)\pi(y)dy \\ &= \int f_x(y)\pi(y)dy=\Pi(f_x)=\rho(x)\Pi(f).\end{aligned}$$

因为 $\{\Pi(f)v|f\in L^1(G),\ v\in H\}$ 生成 H 的稠密子空间, 所以 $\pi(x)=\rho(x)$.

(4) 设 $H\in\widehat{L^1(G)}$, 则有映射 $\Pi\to x$, $\pi\to B\in\widehat{L^1(G)}$. 固定 $u,v\in H$, 则 $f\to\langle\Pi(f)u,v\rangle$ 是 $L^1(G)$ 上的有界线性泛函. 所以存在函数 $Q_{u,v}\in L^\infty(G)$, 使得

$$\langle\Pi(f)u,v\rangle=\int_G f(y)Q_{u,v}(y)dy.$$

于是 $\forall f,g\in L^1(G)$, 有

$$\begin{aligned}B(f)\Pi(g)&=\int f(x)\pi(x)\Pi(g)dx=\int f(x)\Pi(g_x)dx\\&=\iint f(x)g_x(y)Q(y)dydx=\int(f*g)(y)Q(y)dy\\&=\Pi(f*g)=\Pi(f)\Pi(g).\end{aligned}$$

因为 $\{\Pi(g)v\}$ 生成 H 的稠密子空间, 故 $B(f)=\Pi(f)$.

(5) 显而易见, π 与 Π 的不变子空间是一样的, 所以 π 不可约 $\Leftrightarrow$ Π 不可约. □

注 有时不区分定理中的 π,Π, 所以 $\Pi(f)$ 也常记为 $\pi(f)$.

例 6.1.1 设 $(\lambda,L^2(G))$ 是局部紧群 G 的左正则表示, 即对 $x\in G$, $f\in L^2(G)$, $\lambda(x)f(y)=f(x^{-1}y)$, 如果 $x\neq e$, 取 $f\in C_c(G)$, 使得 $f(x)\neq f(e)$, 则对 $f\in L^2(G)$, 便有 $\lambda(x)f=f_x\neq f=\lambda(e)f$. 因此, 对 $x\neq e$, $\lambda(x)\neq\lambda(e)$.

与 λ 对应的 $L^1(G)$ 的表示 Λ 是卷积. 作计算

$$\Lambda(f)g(x)=\int_G f(y)\lambda(y)g(x)dy=\int_G f(y)g(y^{-1}x)dy=f*g(x).$$

我们进一步证明: Λ 是 $L^1(G)$ 的忠实表示. 设有 $f\in L^1(G)$, 使得 $\Lambda(f)=0$, 则对任意的 $g,h\in L^2(G)$,

$$0=(\Lambda(f)g,h)=\int_G f(x)(\lambda(x)g,h)dx.$$

因为 $x\neq e$, 所以 $\lambda(x)\neq I$ (恒等映射). 故连续函数组 $\{x\mapsto(\lambda(x)g,h)|g,h\in L^2(G)\}$ 把 G 的点分开. 这就是说, 对 $x\neq y$, 便有 g,h, 使得 $(\lambda(x)g,h)\neq(\lambda(y)g,h)$. 因为 f 可以用有紧支集 K 的连续函数 L^1-逼近, 而在 K 上连续函数可用形如 $x\mapsto\Sigma ai\times(\lambda(x)g_i,h_i)$ 的函数一致逼近 (Stone-Weierstrass 定理). 所以 $\|f\|_1=0$. 于是 $\Lambda(f)=0\Rightarrow f=0$.

定理 6.1.3(Gelfand-Raikov) 如果 G 是局部紧拓扑群, $x\neq e$, 则存在不可约酉表示 π, 使得 $\pi(x)\neq I$.

证明 把 $L^1(G)$ 扩张为有单位的 $*$ Banach 代数, 然后用上段的结果. 在 $\mathscr{R}=\mathbb{C}\delta\bigoplus L^1(G)$ 中引入乘法:

$$(a\delta+f)(b\delta+g)=(ab)\delta+(ag+bf+f*g).$$

引入范数 $\|a\delta+f\|=a|\delta|+\|f\|$, 则 $\mathscr{R}$ 是有单位元的 $*$ Banach 代数. $L^1(G)$ 是 $\mathscr{R}$ 的极大 $*$ 理想. 把 $L^1(G)$ 的表示 Π 扩张为 $\mathscr{R}$ 的表示 $\widetilde{\Pi}$ 如下:

$$\widetilde{\Pi}(a\delta+f)=aI+\Pi(f).$$

I 是恒等映射. 反过来, 从 $\mathscr{R}$ 的表示 $\widetilde{\Pi}$ 可得 $L^1(G)$ 的表示 $\Pi=\widetilde{\Pi}|_{L^1(G)}$. 在这个对应 $\Pi\longleftrightarrow\widetilde{\Pi}$ 下, 不可约表示、循环表示及忠实表示都相对应.

G 的左正则表示 λ 所决定的 $L^1(G)$ 的表示 Λ 是忠实表示, 所以 $\mathscr{R}$ 有忠实表示 $\widetilde{\Lambda}$. 如上所述, $\mathscr{R}$ 的不可约 $*$ 表示与 G 的不可约酉表示相对应. 由命题 6.1.4 可知, 对 $0\neq f\in L^1(G)$, 存在 G 的不可约酉表示 π, 使得 $\Pi(f)\neq 0$.

对给定的 $x\neq e$, 取 $g\in C_c(G)$, 使得 $g(x^{-1})\neq g(e)$, 则 $\lambda(x)g\neq g$, 即 $f=\lambda(x)g-g\neq 0$. 取 (Π,H), 使得 $\Pi(f)\neq 0$, 即存在 $v\in H$, 使得 $\Pi(f)v\neq 0$. 因此 $\Pi(g)v\neq\Pi(\lambda(x)g)v=\pi(x)\Pi(g)v$, 所以 $\pi(x)\neq I$. □

6.2 Plancherel 定理

$\mathscr{A}$ 是 $*$ Banach 代数. 在 $\widetilde{\mathscr{A}}=\mathbb{C}e\bigoplus\mathscr{A}$ 中引入加法: $(ae+x)+(be+y)=(a+b)e+(x+y)$; 乘法: $(ae+x)\times(be+y)=(ab)e+(bx+ay+xy)$; 对合: $(ae+x)^*=\overline{a}e+x^*$; 范数: $\|ae+x\|=|a|+\|x\|$. 则 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 是 $*$ Banach 代数, $\mathscr{A}$ 是 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 的极大 $*$ 理想. $\mathscr{A}$ 的元 x 的谱是

$$S_{P_{\mathscr{A}}}(x)=\{a\in\mathbb{C}|x-ae \text{ 在 } \widetilde{\mathscr{A}} \text{ 中不可逆}\}.$$

x 的谱半径是

$$\rho(x)=\sup\{|a||a\in S_{P_{\mathscr{A}}}x\}.$$

可以证明 ([Rud 91], Thm. 10.13), $\rho(x)\leqslant\|x\|$ 和

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

命题 6.2.1 设 (Π,H) 是 $*$ Banach 代数 $\mathscr{A}$ 的表示, 则对 $x\in\mathscr{A}$, 有 $\|\Pi(x)\|\leqslant\|x\|$.

证明 如果 $A\in\mathscr{L}(H)$, 满足 $A=A^*$, 则 $\|A^2\|=\|A^*A\|=\|A\|^2$, 所以 $\|A^{2^n}\|^{2^{-n}}=\|A\|$. 于是谱半径是 $\rho(A)=\|A\|$.

因为 Π 是代数同态, 所以显然有: 对 $x\in\mathscr{A}$, 有 $S_{P_{\mathscr{L}(H)}}(x)\subseteq S_{P_{\mathscr{A}}}(x)$, 故 $\rho(\Pi(x))\leqslant\rho(x)$. 于是可作计算

$$\|\Pi(x)\|^2=\|\Pi(x^*x)\|=\rho(\Pi(x^*x))\leqslant\|x^*x\|\leqslant\|x^*\|\|x\|\doteq\|x\|^2.$$ □

称 $*$ Banach 代数为 C* 代数, 如果对 $x\in\mathscr{A}$, 有 $\|x\|^2=\|x^*x\|$.

$*$ Banach 代数 $\mathscr{A}$ 的 $*$ 表示全体记作 $\mathrm{Rep}(\mathscr{A})$. 对 $x \in \mathscr{A}$, $\Pi \in \mathrm{Rep}(\mathscr{A})$, 已知 $\|\Pi(x)\| \leqslant \|x\|$, 故可以定义

$$\|x\|' = \sup_{\Pi \in \mathrm{Rep}(\mathscr{A})} \|\Pi(x)\|.$$

在 $\mathscr{L}(H)$ 中有等式 $\|\Pi(x^*x)\| = \|\Pi(x)\|^2$, 故 $\|x^*x\|' = \|x\|'^2$. 如果 $\mathscr{A}$ 有忠实表示 Π, 则 $x \neq 0 \Rightarrow \Pi(x) \neq 0 \Rightarrow \|x\|' \neq 0$, 所以 $\|\cdot\|'$ 是 $\mathscr{A}$ 的范数. 称 $\mathscr{A}$ 对此范数的完备化 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{A}$ 的包络 C* 代数. 因为 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 的稠密子集, 所以 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的非退化不可约表示成 1-1 对应.

设 G 是局部紧拓扑群, 则 $*$ Banach 代数 $L^1(G)$ 有忠实表示: $g \mapsto f * g$. 称 $L^1(G)$ 的包络 C* 代数为 G 的 C* 代数, 并记之为 $C^*(G)$. G 的不可约酉表示与 $C^*(G)$ 的非退化不可约表示成 1-1 对应.

设 (π, H) 是局部紧群 G 的酉表示, 包含 $\pi(G)$ 的最小弱闭自伴子代数称为 $\pi(G)$ 所生成的 W* 代数, 记它为 $W^*(\pi(G))$.

设 H 为 Hilbert 空间, 以 $\mathscr{L}(H)$ 记 H 上有界算子的全体. $\mathscr{L}(H)$ 的弱拓扑是这样定义的: 网 $A_\alpha \to 0$ 指 $\langle A_\alpha u, v\rangle \to 0$, $\forall u, v \in H$, 设 S 为 $\mathscr{L}(H)$ 的子集, 以 $W^*(S)$ 记包含 S 的最小弱闭自伴子代数 (见 [Sak 71] 1.16.7, [Li 86] 1.3.10 及 4.2.5). 令 $S' = \{B \in \mathscr{L}(H) | BA = AB, \ \forall A \in S\}$. 设 $A \in S$. 若 A 满足条件: (i) $A = A^*$ (自伴), (ii) 存在自伴 $B \in \mathscr{L}(H)$, 使得 $A = B^2$, 则我们称 $A > 0$. 记 $S^+ = \{A \in S | A > 0\}$.

如果对局部紧拓扑群 G 的任意一个连续酉表示 (π, H) 都存在 Hilbert 空间 $\mathscr{V}$ 及 $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ 的弱闭自伴子代数 $\mathfrak{B}$, 使得 $\mathfrak{B}'(\subset \mathscr{L}(\mathscr{V}))$ 是交换代数及 $W^*(\pi(G))$ $(\subset \mathscr{L}(H))$ 与 $\mathfrak{B}$ 同构, 我们称 G 为 I 型 (见 [Dix 77], 13.9.4).

G 为局部紧拓扑群, 它的不可约连续酉表示等价类的全体记为 $\hat{G}$(见 [Dix 77], 13.1.4, 18.1.1). 如果 G 是 I 型, 则 $\pi \in \hat{G}$ 是可迹的 (见 [Dix 77], 6.7.5). 这时也记 π 的等价类为 π. 若 π 作用在 Hilbert 空间 H 上, $\{v_\alpha\}$ 是 H 的正交规范基, $x \in G$, 则 $\pi(x)$ 的迹是

$$\mathrm{tr}(\pi(x)) = \sum_\alpha (\pi(x)v_\alpha, v_\alpha),$$

(见 [Sak 71], §1.15, [Dix 77], A30). 可以证明

定理 6.2.1(Plancherel 定理) 设 G 为 I 型幺模可分局部紧拓扑群, 则 $\hat{G}$ 有唯一测度 μ, 使得 $\forall f, g \in L^1(G) \bigcap L^2(G)$, 有

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\hat{G}} \mathrm{T_r}(\pi(f)^*\pi(f)) d\mu(\pi). \qquad \square$$

我们称以上定理中的 μ 为 G 的 Plancherel 测度. 这个定理的证明见 [Dix 77] 18.8.1, 18.8.2. 这个证明所引用的资料分布在 Diximier 的两本书中. 遗憾的是这两

本书共有 800 多页, 因此我们不可能给出全部证明. 下面只简略地介绍 Diximier 的证明. 他的证明并不构造出 μ(当 G 是简约李群时, μ 由 Harish-Chandra 明确构造出来).

从 $C_c(G)$ 的内积

$$(f,g)\mapsto \int_G f(x)\overline{g(x)}dx,$$

构造 $C^*(G)$ 的迹 t, 我们用 Murray 与 Von Neumann 所创立的约化理论把 t 写成直积分解便得所求的定理.

设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbb{C}$ 上的结合代数, 在 $\mathscr{A}$ 上有对合反自同构 $x\mapsto x^*$ 及内积 $(\cdot|\cdot)$, 使得 $\mathscr{A}$ 为 Hausdorff 准 Hilbert 空间. 设以下条件成立:

(1) $(x|y)=(y^*|x^*),\ \forall x,y\in\mathscr{A}$;

(2) $(xy|z)=(y|x^*z),\ \forall x,y,z\in\mathscr{A}$;

(3) $\forall x\in\mathscr{A}$. 映射 $\mathscr{A}\to\mathscr{A}, y\mapsto xy$ 连续;

(4) 集合 $\{xy|x\in\mathscr{A},\ y\in\mathscr{A}\}$ 所生成的线性空间是 $\mathscr{A}$ 的稠密子集.

这时, 我们称 $\mathscr{A}$ 为 Hilbert 代数 ([Dix 81] 1.5.1). $\mathscr{A}$ 对内积 $(\cdot|\cdot)$ 的完备化所得空间记为 $\mathscr{H}$. 对 $x\in\mathscr{A}$, 以 v_x 记映射

$$\mathscr{A}\to\mathscr{A},\quad y\mapsto yx.$$

设 $a\in\mathscr{H}$, 如果映射

$$\mathscr{A}\to\mathscr{H}:\ x\mapsto v_x a=ax$$

是连续, 则 a 称为有界元. 我们以 $U_a:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ 记这个映射的连续扩张, 即对 $x\in\mathscr{A}$, $U_a(x)=ax$. 设

$$\mathscr{A}^b=\{a\in\mathscr{H}|a \text{ 是有界元}\},$$

则 $\mathscr{A}$ 是 Hilbert 代数 $\mathscr{A}^b$ 的稠密子代数. 以 $\mathscr{U}=\mathscr{U}(\mathscr{A}^b)$ 记 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 的子代数 $W^*(\{U_a|a\in\mathscr{A}^b\})$, 即包含 $\{U_a|a\in\mathscr{A}^b\}$ 的最小弱闭自伴子代数, 则

$$\mathscr{A}^b\to\mathscr{U}:\ a\mapsto U_a$$

是单射 ([Dix 81], 1.5.2). 对 $S\in\mathscr{U}^+$, 设

$$t_{\mathscr{A}}(S)=\begin{cases}(a|a), & \text{若有 } a\in\mathscr{A}^b, \text{ 使得 } S^{\frac12}=U_a,\\ +\infty, & \text{否则}.\end{cases}$$

则 $t_{\mathscr{A}}:\mathscr{U}^+\mapsto[0,+\infty]$ 有下列性质:

(i) $S,T\in\mathscr{U}^+\Rightarrow t_{\mathscr{A}}(S+T)=t_{\mathscr{A}}(S)+t_{\mathscr{A}}(T)$;

(ii) $S\in\mathscr{U}^+,\ \lambda\in[0,+\infty]\Rightarrow t_{\mathscr{A}}(\lambda S)=\lambda t_{\mathscr{A}}(S)$ (约定: $0,+\infty=0$);

(iii) $S \in \mathscr{U}^+$, $U \in \mathscr{U}$, $UU^* = U^*U = 1 \Rightarrow t_{\mathscr{A}}(USU^{-1}) = t_{\mathscr{A}}(S)$.

这就是说 $t_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{U}^+$ 的迹 ([Dix 81], 1.6.1, 1.6.2). 利用配极变换便得

$$t_{\mathscr{A}}(U_b^* U_a) = (a|b), \quad a, b \in \mathscr{A}^b.$$

现设 G 是 I 型幺模可分局部紧拓扑群, ε_e 是在 G 的单位元 e 的 Dirac 测度, 即对 $f \in C_c(G)$, $\varepsilon_e(f) = f(e)$. 对 $f, g \in C_c(G)$, 有内积

$$(f|g) = \varepsilon_e(g^* * f) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx,$$

其中 $g^*(x) = \overline{g(x^{-1})}$. 不难证明 $\{C_c(G), (\cdot|\cdot)\}$ 是 Hilbert 代数 ([Dix 77], 13.10.1, 17.2.1, 17.2.2, 17.2.5). $C_c(G)$ 对 $(\cdot|\cdot)$ 的完备化是 $L^2(G)$. 以 $H(G)$ 记 $(C_c(G))^\delta$, 称它为 G 的 Hilbert 代数. 可以证明, 对 $a \in H(G)$ 及 $x \in L^2(G)$ 有 $U_a x = a * x$ ([Dix 77], 13.10.3). $H(G)$ 是 $C^*(G)$ 的双边理想. 对 $z \in C^*(G)$, 左平移 $U_z : H(G) \to H(G)$, $a \mapsto z * a$ 可以扩张为 $\mathscr{L}(L^2(G))$ 的元, 并且 $U_z \in \mathscr{U} = \mathscr{U}(H(G))$ ([Dix 77], 6.2.3). 这样对 $z \in C^*(G)^+$, 设

$$t(z) = t_{C_e(G)}(U_z)$$

([Dix 77] 6.4.2). 由集合 $\{z \in C^*(G)^+ | t(z) < +\infty\}$ 所生成的线性空间记为 $\mathfrak{M}_t$, 则可以证明

$$t : C^*(G)^+ \to [0, +\infty]$$

是 $C^*(G)$ 的下半连续迹, 并且 $\mathfrak{M}_t$ 是 $C^*(G)$ 的稠密子集. 这时对 $f \in L^1(G) \bigcap L^2(G)$, 有

$$t(f^* * f) = t(U_f^* U_f) = (f|f) = \int_G |f(x)|^2 dx.$$

定理 6.2.2 设 $\mathscr{A}$ 是 I 型可分 C* 代数, $\hat{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{A}$ 的非退化不可约表示的等价类的全体. 若

$$t : \mathscr{A}^+ \to [0, +\infty]$$

是 $\mathscr{A}$ 的下半连续迹, 则 $\hat{\mathscr{A}}$ 有唯一正测度 μ, 使得对 $x \in \mathscr{A}^+$, 有

$$t(x) = \int_{\hat{\mathscr{A}}} \mathrm{tr}\pi(x) d\mu(x)$$

([Dix 77], 8.8.5, 8.8.6). □

因为 $\hat{G}$ 与 $\widehat{C^*(G)}$ 有 1-1 对应的关系, 所以对上面所构造的 $t : C^*(G)^+ \to [0, +\infty]$ 应用定理 6.2.2, 我们便立刻得到所求的关于 Plancherel 测度的存在定理.

6.3 Fourier 代数

6.3.1

设 $(X, \mathscr{A})$ 为测度空间. 称 $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 为 X 上的复测度, 若 ν 满足以下条件:

(1) $\nu(\varnothing) = 0$,

(2) 若 $E_n \in \mathscr{A}$, $E_n \bigcap E_m = \varnothing$ $(n \neq m)$, 则

$$\nu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

可以定义测度 $|\nu|$ 如下: 取 $E \in \mathscr{A}$, 则设

$$|\nu|(E) = \sup \sum_{k=1}^{n} |\nu(E_k)|,$$

这里 sup 是对 E 的所有分割取值, 分割是指 $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$, $E_k \in A$, $E_k \bigcap E_j = \varnothing$ $(k \neq j)$.

现设 X 为局部紧 Hausdorff 空间. 由 X 的所有 Borel 子集所组成的 σ-代数记为 $\mathscr{B}(X)$. 设 $\mu : \mathscr{B}(X) \to \mathbb{C}$ 为复测度. 称 μ 为 X 的正则 Borel 复测度若以下条件成立: 对任一 $E \in \mathscr{B}(X)$ 及 $\varepsilon > 0$, 存在紧集 F 和开集 U 使得 $F \subset E \subset U$ 及 $|\mu(A)| < \varepsilon$ 对所有 $A \in \mathscr{B}(X)$ 使得 $A \subset U \bigcap (X \backslash F)$.

由 X 的所有正则 Borel 复测度所组成的集合记为 $M(X)$. 于是, 若 $\mu \in M(X)$, $a \in \mathbb{C}$, 则 $a\mu \in M(X)$; 若 $\mu, \nu \in M(X)$, 则 $\mu + \nu \in M(X)$. 若 $\mu \in M(X)$, 设 $\|\mu\| = |\mu|(X)$. 这样 MX 是赋范空间.

设 X 为非空局部紧 Hausdorff 空间. 我们说函数 $f : X \to \mathbb{C}$ 在无穷远为零若对任意 $\varepsilon > 0$, X 内存在紧子集 F 使得 $|f(x)| < \varepsilon$ 对所有 $x \in (X \backslash F)$. 由所有 X 上在无穷远为零的连续函数所组成的线性空间记 $C_0(X)$. 对 $f \in C_0(X)$ 可以定义 sup 范数

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

以此范数 $C_0(X)$ 为 Banach 空间.

设 X 为局部紧 Hausdorff 空间. 取 $\mu \in M(X)$, $f \in C_0(X)$. 用以下公式定义 L_μ:

$$L_\mu(f) = \int_X f d\mu,$$

则 $L_\mu : C_0|X| \to \mathbb{C}$ 为有界线性泛函, 而且

$$\|L_\mu\| = \|\mu\|$$

(见 [HS 71] p361).

Riesz 表示定理 设 X 为局部紧 Hausdorff 空间. 以 $C_0(X)^*$ 记 $C_0(X)$ 的对偶空间. 则

$$M(X) \to C_0(X)^* : \mu \mapsto L_\mu$$

是保范线性双射, 即 $M(X)$ 与 $C_0(X)^*$ 是同构的 Banach 空间 (见 [HS 71] (20.48) p384).

设 G 是局部紧拓扑群. 由 G 的所有 Radon 复测度所生成的空间记为 $M(G)$. 设 $\mu,\nu \in M(G)$. 取 $\phi \in C_0(G)$. 设 $I(\phi) = \iint \phi(xy)d\mu(x)d\nu(y)$, 则 $|I(\phi)| \leqslant \|\phi\|_\infty \|\mu\|\|\nu\|$. 所以 $\phi \mapsto I(\phi)$ 是 $C_0(G)$ 上的线性泛函. 于是可以定义测度 μ,ν 的卷积 (convolution)$\mu * \nu$ 为

$$\int \phi d(\mu * \nu) = \iint \phi(xy)d\mu(x)d\nu(y),$$

而且 $\|\mu * \nu\| \leqslant \|\mu\|\|\nu\|$ 成立.

取 $\mu,\nu,\sigma \in M(G)$, $\phi \in C_c(G)$. 则

$$\begin{aligned}\int \phi d[\mu * (\nu * \sigma)] &= \iint \phi(xy)d\mu(x)d(\nu * \sigma)(y) = \iiint \phi(xyz)d\mu(x)d\nu(y)d\sigma(z)\\ &= \iint \phi(yz)d(\mu * \nu)(y)d\sigma(z) = \int \phi d[(\mu * \nu) * \sigma].\end{aligned}$$

于是得知卷积满足结合律: $\mu * (\nu * \sigma) = (\mu * \nu) * \sigma$. 设 δ 为单位元 1 的点测度, 则

$$\int \phi d(\delta * \mu) = \iint \phi(xy)d\delta(x)d\mu(y) = \int \phi(y)d\mu(y) = \int \phi d\mu,$$

即有 $\delta * \mu = \mu$. 同样可证 $\mu * \delta = \mu$.

我们可以定义 μ^* 如下:

$$\int \phi d\mu^* = \int \phi(x^{-1})d\overline{\mu}(x),$$

即 $\mu^*(E) = \overline{\mu(E^{-1})}$ (这里 "—" 是复共轭), 则 $(\mu * \nu)^* = \nu^* * \mu^*$. 我们证明这个等式如下:

$$\begin{aligned}\int \phi d(\mu * \nu)^* &= \int \phi(x^{-1})d\overline{(\mu * \nu)} = \iint \phi\left((xy)^{-1}\right)d\overline{\mu}(x)d\overline{\nu}(y)\\ &= \iint \phi(y^{-1}x^{-1})d\overline{\mu}(x)d\overline{\nu}(y) = \iint \phi(yx)d\mu^*(x)d\nu^*(y)\\ &= \int \phi d(\nu^* * \mu^*).\end{aligned}$$

从以上讨论得 $M(G)$ 为带单位元 δ 的 $*$ Banach 代数. 按 Riesz 表示定理得知 $M(G)$ 与 $C_0(G)^*$ 为同构 Banach $*$ 代数.

6.3.2

设 A 为 C^* 代数. 它的不可约 $*$ 表示酉等价类的全体记为 $\hat{A}$. 称 $\hat{A}$ 为 A 的对偶空间. 设有表示集合 $R \subseteq \hat{A}$. 取 $\mathrm{Ker}_R = \bigcap\limits_{S\in R} \mathrm{Ker}\ S$. 定义 $\overline{R}$ 为

$$\overline{R} = \left\{T \in \hat{A} | \mathrm{Ker}\ T \supset \mathrm{Ker}_R\right\},$$

可以证明 $\hat{A}$ 上有拓扑使得对此拓扑集 R 的闭包为 $\overline{R}$.

设 G 为局部紧拓扑群. 由 G 的所有不可约连续酉表示等价类所组成的集合记为 $\hat{G}$. 利用 $\hat{G}$ 与 $(C^*(G))^\wedge$ 的一一对应, 我们把以上定义的 $(C^*(G))^\wedge$ 的拓扑转移至 $\hat{G}$ 上. 这样得出来 $\hat{G}$ 的拓扑称为 Fell 拓扑.

6.3.3

设 G 是局部紧拓扑群. 称 G 上的函数 φ 为正定函数 (positive definite function), 若对任何有限个 $x_n \in G$ 及复数 c_n 均有

$$\sum_{n,m} c_n \overline{c}_m \varphi\left(x_m^{-1} x_n\right) \geqslant 0.$$

我们以 $P(G)$ 记 G 上的正定函数所组成的集合.

如果 f 为 G 上的函数, $s \in G$, 定义 $\lambda(s)f$ 为函数: $\lambda(s)f(x) = f\left(s^{-1}x\right)$.

设 (π_1, H) 为 G 的酉表示. 取 $v \in H$; $a_i, b_j \in \mathbb{C}$; $s_i, t_j \in G$. 设 $u = \sum a_i \pi(s_i) v$, $w = \sum b_j \pi(t_j) v$, 则

$$(u, w) = \sum a_i \overline{b}_j (\pi(s_i)v, \pi(t_j)v) = \sum a_i \overline{b}_j \left(\pi\left(t_j^{-1} s_i\right)v, v\right).$$

称 G 的酉表示 (π, H) 为循环表示, 如果 π 为不可约表示并且存在 $v \in H$ 使得由集合 $\{\pi(x)v | x \in G\}$ 所生成的子空间为 H 的稠密子空间. 此时称 v 为表示 π 的循环向量 (cyclic vecfor). 称函数 $\varphi(x) = (\pi(x)v, v)$ 为循环表示 π 的特征函数.

对任意 $s_i \in G$, $a_i \in \mathbb{C}$. 设 $u = \sum a_i \pi(s_i) v$, 则

$$\sum a_i \overline{a}_j \varphi\left(t_j^{-1} s_i\right) = \sum a_i \overline{a}_j \left(\pi\left(t_j^{-1} s_i\right)v, v\right) = (u, u) \geqslant 0.$$

故知循环表示的特征函数为正定函数.

定理 6.3.1 $P(G)$ 是由 G 的循环表示的特征函数所组成.

证明 设 $\varphi \in P(G)$, 则

$$\varphi(e) \geqslant 0, \quad |\varphi(x)| \leqslant \varphi(e), \quad \phi\left(x^{-1}\right) = \overline{\phi}(x).$$

由集合 $\{\lambda(s)\varphi | s \in G\}$ 所生成的向量空间记为 V_φ. 取 V_φ 的元素

$$\psi(x) = \sum a_i \lambda(s_i)\varphi(x),$$
$$\theta(x) = \sum b_j \lambda(t_j)\varphi(x).$$

设 $(\psi, \theta)_\varphi = \sum a_i \bar{b}_j \varphi(t_j^{-1} s_i)$, 则

$$(\psi, \theta)_\varphi = \sum \bar{b}_j \psi(t_j) = \sum a_i \bar{\theta}(s_i).$$

故知给出 θ, 则 $(\psi, \theta)_\varphi$ 由 ψ 的值决定, 与 ψ 的表达式无关. 同理亦与 θ 的表达式无关. 所以 $(\psi, \theta)_\varphi$ 是由 V_φ 的元素 ψ, θ 决定. 显然

$$(\psi, \theta)_\varphi = \overline{(\theta, \psi)_\varphi},$$
$$(\psi, \psi)_\varphi \geqslant 0,$$
$$|(\psi, \theta)_\varphi|^2 \leqslant (\psi, \psi)_\varphi \cdot (\theta, \theta)_\varphi.$$

于是知 $(\cdot, \cdot)_\varphi$ 为 v_φ 的内积. 以此内积, 对 V_φ 求完备化所得的 Hilbert 空间记为 H_φ.

若 $\psi = \sum a_i \lambda(s_i)\varphi$, $\theta = \sum b_j \lambda(t_j)\varphi \in V_\varphi$, 则

$$(\lambda(s)\psi, \lambda(s)\theta)_\varphi = \sum a_i \bar{b}_j \varphi(t_j^{-1} s^{-1} \cdot s s_i) = (\psi, \theta)_\varphi.$$

又有

$$(\lambda(s)\psi, \theta)_\varphi = \sum a_i \bar{b}_j \varphi\left(t_j^{-1} s s_j\right),$$

于是得知 (λ, H_φ) 为酉表示. 由构造知 (λ, H_φ) 为循环表示, φ 为循环向量, 其特征函数为

$$(\lambda(s)\varphi, \varphi)_\varphi = \varphi(s). \qquad \square$$

6.3.4

设 G 为局部紧拓扑群. 由 G 的连续酉表示等价类所组成的集合记为 Σ. 若 $\pi \in \Sigma$, 以 H_π 记 π 的表示空间, 即, 对 $x \in G$, $\pi(x)$ 作用在 H_π 上. 以 $L(H_\pi)$ 记 H_π 上的有界算子所组成的代数. 若 $f \in L^1(G)$, 则有 $\pi(f) \in L(H_\pi)$. 以 $\|\pi(f)\|$ 记 $\pi(f)$ 的算子范数. 定义

$$\|f\|_\Sigma := \sup_{\pi \in \Sigma} \|\pi(f)\|.$$

赋范空间 $(L^1(G), \|\cdot\|_\Sigma)$ 的完备化, 记为 $C^*(G)$. 参看 [Fel 60].

$\pi \in \Sigma$ 的矩阵系数 (matrix coefficient) 是指这样的函数 $\varphi(x) := (\pi(x)u, v)$, 其中 $x \in G$; $u, v \in H_\pi$. 设有矩阵系数 $\varphi_j(x) = (\pi_j(x)u_j, v_j)$, $j = 1, 2$ 及复数 c_1, c_2. 取表示直和 $\pi_1 \bigoplus \pi_2$ 作用在空间 $H_{\pi_1} \bigoplus H_{\pi_2}$ 上, 则

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = (\pi_1 \bigoplus \pi_2(x))\left((c_1 u_1, c_2, u_2), (v_1, v_2)\right).$$

从此知 $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ 亦为矩阵系数. 这样便知 G 的矩阵系数所组成的集合为线性空间.

设有矩阵系数 $\varphi(x) = (\pi(x)u, v)$. 取 $f \in L^1(G)$. 则

$$\left|\int f(x)\varphi(x)dx\right| = |(\pi(f)u, v)| \leqslant |||\pi(f)|||u||v||| \leqslant \|f\|_\Sigma |u||v| < \infty.$$

于是可以设

$$\|\varphi\| = \sup_{f\in L^1(G),\ \|f\|_\Sigma \leqslant 1} \left|\int f(x)\varphi(x)dx\right|.$$

由 G 上所有正定函数所组成的集合记为 $P(G)$. 由 $P(G)$ 的元素所生成的向量空间记为 $B(G)$. 因为 $P(G)$ 的任一元素 φ 可表达为 $\varphi(x) = (\pi(x)u, u)$, 其中 u 为 $\pi \in \Sigma$ 的循环向量, 所有亦可以把 $B(G)$ 看作 G 的矩阵系数所组成的集合. 同时可以用以上公式定义 $\varphi \in B(G)$ 的范数 $\|\varphi\|$. 此时对 $f \in L^1(G)$, $\varphi \in B(G)$, 若设

$$\langle f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)dx,$$

又若 $\varphi(x) = (\pi(x)u, v)$, 则对 $g \in C^*(G)$ 有

$$\langle g, \varphi\rangle = (\pi(g)u, v).$$

可见 $B(G)$ 为 Banach 空间 $C^*(G)$ 的对偶空间 (参看 [Eym 64] 192 页). 我们称交换 Banach 代数 $B(G)$ 为 G 的 Fourier 代数.

我们已知若 G 是交换局部紧拓扑群则 G 的对偶群 $G^\wedge$ 亦是交换局部紧拓扑群, 并且有同构 $G^{\wedge\wedge} \approx G$. 如果 G 不是交换的, 则 G 的酉表示等价类集合没有拓扑群结构. 我们需要 Kac 代数这个概念来建立一般局部紧拓扑群的对偶理论. 详情见 Enock 和 Schwartz 的教本 [ES 92]. 利用 Kac 代数可以证出以下定理.

若 A 是交换 Banach 代数, 由所有非零同态 $A \to \mathbb{C}$ 所组成的集合记为 $A^\wedge$, 称 $A^\wedge$ 为 A 的谱 (spectrum).

设 G 为局部紧拓扑群. 空间 $C_c(G)$ 的元素为 G 上的有紧支集的连续函数. 以 $A(G)$ 记 $B(G)\bigcap C_c(G)$ 在 $B(G)$ 内的闭包, 则 $A(G)$ 为交换 Banach 代数.

Eymard 对偶定理　$A(G)$ 的谱同构于 G. (见 [ES 92], 4.3.3, 137 页).

Walter 定理　设 G_1, G_2 是局部紧拓扑群. 若有保乘等距线性映射 $T : A(G_1) \to A(G_2)$, 则存在 $s \in G_1$ 及从 G_2 到 G_1 的拓扑群同态或反同构 α 使得对 $t \in G_2$, $f \in A(G_1)$, 有

$$(Tf)(t) = f\big(s^{-1}\alpha(t)\big).$$

(见 [ES 92] 5.5.12, 184 页).

至于其他 Fourier 代数的研究我们不多述了 (比如可看 [LL 12], [CL 06]).

习 题

1. 称局部紧幺模拓扑群 G 的酉表示 (π, H) 为 CCR, 如果 $\forall f \in C_c(G)$, $\pi(f)$ 是紧算子. 证明: 如果 (π, H) 是 CCR, 则 $(\pi, H) = \bigoplus(x_i, H_i)$, 其中 π_i 是 G 的不可约酉表示, 且对任意固定的 H_i 只有有限个 j 使得 (π_i, H_i) 与 (π_j, H_j) 等价 (见 [Wal 73] 2.7.4, [AM 66]).

2. 设 H 是局部紧群 G 的闭子群, Δ_G 是 G 对右不变 Haar 测度 dx 的模函数, 即

$$\int f(s^{-1}x)dx = \Delta(s)\int f(x)dx.$$

δ 是 $H\backslash G$ 的右平移拟不变测度所决定的模函数, 即

$$\delta(yx) = \frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}\delta(x), \quad x \in G,\ y \in H.$$

设 τ 是 H 在局部凸拓扑空间 V 的表示, f 是取值在 V 的有紧支集 mod$H$ 的连续函数, 且满足以下条件:

$$f(yx) = \left(\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(Y)}\right)^{1/2}\tau(y)f(x), \quad x \in G,\ y \in H.$$

对这种 f 引进右平移表示:

$$\rho(s)f(x) = f(xs).$$

证明: ρ 是 G 的表示.

3. 设 H 是局部紧群 G 的闭子群, δ 决定 G/H 上的拟不变测度 dx, (τ, V) 是 H 的酉表示. 在直积空间 $G \times V$ 上引进等价关系 $\sim$ 如下:

$$(x, v) \sim \left(xy, \delta(y)^{1/2}\tau(y^{-1})v\right), \quad y \in H.$$

以 $G \underset{H}{\times} V$ 记这个等价关系决定的商空间. $p: G \underset{H}{\times} V \to G/H$ 是对第一个坐标的投射. 称映射 $s:\ G/H \to G \underset{H}{\times} V$ 为截面, 如果 $ps = I_d$. 以 Γ_c 记有紧支集的截面的全体, 在 Γ_c 上引入内积

$$(s_1, s_2) = \int_{G/H} \langle s_1(\dot{x}), s_2(\dot{x})\rangle_{\dot{x}} d\dot{x},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\dot{x}}$ 是纤维 $p^{-1}(\dot{x})$ 中的内积

$$\langle(x, v_1), (x, v_2)\rangle_{\dot{x}} = \delta(x)^{-1}(v_1, v_2)_V.$$

Γ_c 的完备化记为 $L^2(G \underset{H}{\times} V)$. 在这空间上引入 G 的作用 π:

$$\pi(x_0)s(xH) = x_0 \cdot s\big(x_0^{-1}xH\big).$$

(i) 证明: $(\pi, L^2(G \underset{H}{\times} V))$ 是 G 的酉表示 (Wallach [Wal 73] 2.4.6);

(ii) 把截面 s 按坐标写成 $s(xH) = (x, f(x))$, 证明 $T:\ s \mapsto f$ 是 π 与诱导表示 $\mathrm{ind}_H^G \tau$ 的缠结算子.

第 7 章　K　理　论

现代 K 理论是研究 C^* 代数的 K 群及其在微分流形上的拟微分算子的应用. 这些理论是 Connes 所建的非交换几何的基本工具 ([Con 94], [FGV 00], [MN 08]). 这是远超过本书的范围. 本章只是介绍一点与拓扑群有关的 K 理论. 为此我们从拓扑 K 理论开始. 然后讲三个 C^* 代数的 K 理论. 希望为读者提供一些起步的背景知识. 关于范畴的知识可看:《模曲线引论》第一章. 本章所谈亦不是代数 K 理论 (见 [Sri 08]).

7.1　拓扑 K 理论

设 M 为微分流形, M 在每点的切向空间并起来成为 M 的切向丛 TM. 这是反映 M 作为微分流形的一个重要结构. 一般的拓扑空间是没有微分结构的, 只好退而求其次去研究向量丛.

7.1.1

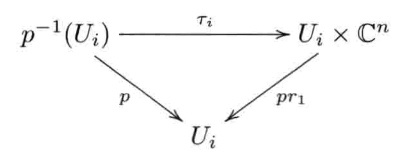
设 X, Y 为拓扑空间. 若双射 $f: X \to Y$ 及其逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 均为连续, 则称 f 为同胚 (homeomorphism).

取正整数 n. 设有拓扑空间连续映射 $p: E \to X$ 使得

1. 存在 X 的开子集 U_i, $i \in I$, 使得 $X = \cup_{i\in I} U_i$. 并对每个 $i \in I$ 存在同胚

$$\tau_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n,$$

使得有以下交换图



其中 $\mathbb{C}^n$ 取其自然拓扑,

$$pr_1 : U_i \times \mathbb{C}^n \to U_i : (x, v) \mapsto x$$

为第一因子投射.

2. 对任一 $x \in X$, $p^{-1}(x)$ 为 n 维复向量空间. 还有, 对任一 $x \in U_i$, 合成以下映射:

$$p^{-1}(x) \subset p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\tau_i} U_i \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{pr_2} \mathbb{C}^n$$

所得的映射

$$\widetilde{\tau}_i(x) : p^{-1}(x) \to \mathbb{C}^n$$

为同胚线性双射, 其中 pr_2 为第二因子投射.

3. 对 $x \in U_i \cap U_j \neq \varnothing$, 设 $g_{ij}(x) = \widetilde{\tau}_j(x)\widetilde{\tau}_i(x)^{-1}$, 则

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbb{C})$$

为连续函数, 这里 $GL(n, \mathbb{C})$ 是由 $n \times n$ 可逆复矩阵所组成的拓扑群.

当以上所有条件都成立时便称 E 或 $p : E \to X$ 为 X 上的 n 维向量丛 (n dimensional vector bundle over X). 常以 E_x 记 $p^{-1}(x)$, 并称它为 E 在点 x 的纤维 (fiber). 称 $\{g_{ij}\}$ 为向量丛 E 的过渡函数族 (family of transition functions) (参看 [Ati 67] §1.1). 向量丛是纤维丛的特例. 关于纤维丛的经典名著是 [Ste 51]. 如果 X 是微分流形则可要求向量丛有微分结构, 可参看 [CC 83].

反过来, 设拓扑空间 X 有开覆盖 $\{U_i | i \in I\}$, 又对每一对指标 $i, j \in I$, 在 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ 时, 都给定了一个连续映射 $g_{ij} : U_i \cap U_j \to GL(n, \mathbb{C})$ 使得以下相容条件成立:

1. 对于 $x \in U_i$, $g_{ii}(x) = id_{\mathbb{C}^n}$ ($\mathbb{C}^n$ 恒等映射).

2. 若 $x \in U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, 则 $g_{jk}(x)g_{ij}(x) = g_{ik}(x)$, 此称为上链条件 (cocycle condition).

则可以构造 X 上的向量丛 $E \to X$, 它以所给定的 $\{g_{ij}\}$ 为过渡函数族. 证明见 [CC 83] 第三章第 1 节定理 1.1; [Ati 67] 20~23 页. 甚至可以证明 X 上的向量丛是由上同调群 $H^1(X, GL(n))$ 分类, [Hir 78] §3 Thm 3.2.1.

称第一因子投射 $pr_1 : X \times \mathbb{C}^n \to X$ 为平凡向量丛 (trivial vector bundle), 常记此为 $[n]$.

一个从 n 维向量丛 $p : E \to X$ 到 m 维向量丛 $q : F \to X$ 的同态是指连续映射 $\phi : E \to F$ 使得 (1) $q\phi = p$, (2) 对任一 $x \in X$, 限制 ϕ 所得 $\phi_x : E_x \to F_x$ 为线性映射. 若 ϕ 为同胚, 则称 ϕ 为同构. 由所有从 E 到 F 的同态所组成的集合记为 $\mathrm{Hom}(E, F)$. 取 $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(E, F)$. 以

$$(\phi + \psi)_x = \phi_x + \psi_x : v \mapsto \phi_x(v) + \psi_x(v)$$

定义 $\phi + \psi$. 则易见 $\mathrm{Hom}(E, F)$ 为交换群.

设有向量丛 $p : E \to X$, $q : F \to X$. 定义

$$E \bigoplus F := \{(u, v) \in E \times F | p(u) = q(v)\},$$

$$p \bigoplus q := E \bigoplus F \to X : (u, v) \mapsto p(u) = q(v).$$

在 $E\bigoplus F$ 取从积 $E\times F$ 所诱导拓扑. 易证 $p\bigoplus q: E\bigoplus F\to X$ 为向量丛, 并且 $E\bigoplus F$ 在点 x 的纤维 $(p\bigoplus q)^{-1}(x)$ 同构于有限维向量空间的直和 $E_x\bigoplus F_x$. $E\bigoplus F$ 称为直和. 显然 $[n]\bigoplus[m]=[n+m]$.

更一般的构造方法参看 [Ati 67] §1.2.

以 $\mathscr{V}(X)$ 记所有 X 上的向量丛所组成的集合. 从范畴的观点, 以上所述是 $\mathscr{V}(X)$ 为加性范畴 (additive category). 参看 [Kar 78] Chap I Thm 6.1. X 上的向量丛同构类所组成的集合记为 $\mathrm{Vect}(X)$. 以直和为加法此集合为交换么半群 ([Ati 67] 17 页).

设有向量丛 $p: E\to X$. 称连续映射 $s: X\to E$ 为向量丛 E 的截面 (section), 如果对 $x\in X$ 有 $ps(x)=x$, 即 $x(x)\in E_x$. ([Ati 67] 1 页.) 以 $\varGamma(E)$ 记 E 的截面所组成的集合. 如果 $s_1,s_2\in\varGamma(E)$, 利用纤维 E_x 的加法定义 s_1+s_2 如下:

$$(s_1+s_2)(x):=s_1(x)+s_2(x),\quad x\in X.$$

现设 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间, 则 X 上连续复值函数组成交换 C* 代数 $C(X)$. 取 $f\in C(X)$, $s\in\varGamma(E)$, 定义 fs 如下:

$$fs(x):=f(x)s(x),\quad x\in X,$$

则 $\varGamma(E)$ 成为 $C(X)$-模. 如果 $\phi: E\to F$ 是向量丛同态, 则

$$\varGamma(\phi):\varGamma(E)\to\varGamma(F): s\mapsto\phi\circ s$$

是 $C(X)$-模同态. 见 [Ati 67] 30 页.

定理 7.1.1 函子 $\varGamma$ 是从 X 上的向量丛范畴到有限生成投射 $C(X)$-模范畴的等价.

见 [Ati 67] 31 页. 这个定理告诉我们将来怎样把 K 理论从交换 C* 代数推广至不必是交换的 C* 代数.

7.1.2

若有映射 $S\times S\to S: x,y\mapsto x+y$ 满足结合律 $(x+y)+z=X+(y+z)$, 交换律 $x+y=y+x$ 及有元 $0\in S$ 使得对所有 $x\in S$ 有 $x+0=x$, 则称 S 为交换么半群 (commutative monoid).

设 S 为交换么半群, 则有满足以下条件的交换群 $G(S)$ 及半群同态 $\sigma: S\to G(S)$. 若有交换群 G 及半群同态 $\phi: S\to G$, 则有唯一的群同态 $\gamma: G(S)\to G$ 使得 $\phi=\gamma\sigma$. 从以上条件易推知, 除同构外, $G(S)$ 是唯一的. 常称 $G(S)$ 为 S 的 Grothendieck 群. 以下介绍 $G(S)$ 的一个构造方法. [Ati 67] §2.1, [Kar 78] 52 页.

取对角线映射 $\Delta : S \to S \times S : x \mapsto (x, x)$. 设 $G(S) = S \times S/\Delta(S)$ 为商半群, (x, y) 在 $G(S)$ 的像记为 $[x, y]$, 则 $[x, y] + [y, x] = 0$. 固知为 $G(S)$ 交换群. 若有半群同态 $\phi : S \to T$, 则 $[x, y] \mapsto [\phi x, \phi y]$ 给出群同态 $G(\phi) : G(S) \to G(T)$. 如此得函子 $G \mapsto G(S)$. 设 $\sigma_S : S \to G(S) : x \mapsto [x, 0]$, 则 σ 定义了自然变换, 即有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\sigma_S} & G(S) \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(\phi)} \\ T & \xrightarrow[\sigma_T]{} & G(T) \end{array}$$

若 T 是群, σ_T 是同构, $\gamma = (\sigma_T)^{-1}G(\phi)$ 便是所求之同态. 另外, 因为 $[x, y] = [x, 0] + [0, y] = [x, 0] - [y, 0]$, 得知 $G(S)$ 的任一元可写为 $\sigma x - \sigma y$, $x, y \in S$.

7.1.3

设有连续映射 $f : Y \to X$ 及向量丛 $p : E \to X$, 并设

$$f^*E := \{(y, v) \in Y \times E : f(y) = p(v)\},$$

则第一因子投射 $f^*(p) : f^*E \to Y$ 是 Y 上的向量丛. 见 [Ati 67] 第 2 页.

设 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间, 定义 $K(X)$ 为 Grothendieck 群 $G(\mathrm{Vect}(X))$. 设有连续映射 $f : Y \to X$, 则有同态 $f^* : \mathrm{Vect}(X) \to \mathrm{Vect}(Y)$. 从此得出同态 $f^* : K(X) \to K(Y)$. 可以证明 $X \mapsto K(X)$ 为从紧拓扑空间范畴到交换群范畴的反变函子, 见 [Ati 67] 43 页. 这种从加性范畴 $\mathscr{V}(X)$ 得出 $K(X)$ 的方法适用于一般加性范畴 $\mathfrak{C}$, 我们同样地定义一个共变函子 $\mathfrak{C} \mapsto K(\mathfrak{C})$ ([Kar 78] Chap II).

若 X 为局部紧 Hausdorff 拓扑空间, 则有 X 的一点紧化 $X^+ = X \cup \{\infty\}$ ([Dug 66] Chap XI, 8.4). 取常映射 $j : X^+ \to \{\infty\} : x \mapsto \infty$. 然后定义 $K(X)$ 为余核 $\mathrm{Cok} j^*$.

7.1.4

设 X 为拓扑空间. A 为 X 的子集. 引入关系 $\sim$: 若 $x \in X \setminus A$ 则 $x \sim x$; 若 $x, y \in A$ 则 $x \sim y$. 以 X/A 记 $\sim$ 的等价类, 则 X/A 的元素为 $\{x\}, x \in X \setminus A$ 和 A. 当把集 A 看作 X/A 的点时, 我们以 A/A 记它, 并称它为 X/A 的基点. 以 $p(x)$ 记 x 的等价类, 得投射 $p : X \to X/A$. 以 p 在 X/A 上设定商拓扑 (quotient topology), 即 $V \subset X/A$ 为开集当且仅当 $f^{-1}(V)$ 为 X 之开集. 参看 [Dug 66], Chap VI-4.

单位区间 $I = [0, 1]$. 取 $\partial I = 0 \cup 1$. 以 S^1 记有基点的单位圆 $I/\partial I$.

现设 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间, Y 为 X 的闭子空间. 选定 X 一点 x_0 为基

点, 及 Y 一点 y_0 为基点. 设

$$X \vee Y = X \times y_0 \cup x_0 \times Y,$$
$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y.$$

称 $S^1 \wedge X$ 为 X 的已约同纬像 (reduced suspension) 并记它为 SX. 重复 n 次 $S(S \cdots S(X) \cdots)$ 记为 $S^n X$.

如果 X 有基点 $i : x_0 \hookrightarrow X$, 则 $i^* : K(X) \to K(x_0)$. 以 $\widetilde{K}(X)$ 记 Ker i^* ([Ati 67] 66 页).

设整数 $n \geqslant 0$. 定义

$$K^{-n}(X, Y) := \widetilde{K}(S^n(X/Y)),$$
$$K^{-n}(X) := K^{-n}(X, \varnothing).$$

对 $n > 0$ 用 $K^{-n} = K^{-n-2}$ 定义 $K^n(X, Y)$ ([Ati 67] 68, 78 页).

定理 7.1.2 设 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间, Y 为 X 的闭子空间, $i : Y \to X$, $j : (X, \varnothing) \to (X, Y)$ 为包含映射, 则存在同态 δ^{-n} 使得有正合序列

$$\cdots \to K^{-2}(Y) \xrightarrow{\delta^{-2}} K^{-1}(X, Y) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} K^{-1}(Y)$$
$$\xrightarrow{\delta^{-1}} K^0(X, Y) \xrightarrow{j^*} K^0(X) \xrightarrow{i^*} K^0(Y).$$

([Ati 67] Prop 2.4.4.)

定理 7.1.3 设 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间, Y 为 X 的闭子空间, 则存在同构

$$\beta : K^{-n}(X, Y) \xrightarrow{\approx} K^{-n-2}(X, Y)$$

(见 [Kar 78] Chap III Thm 1.3; [Ati 67] Thm 2.4.9). 这是拓扑 K 理论基本的 Bott periodicity 定理. 于是, 有同态

$$K^0(Y) \approx K^{-2}(Y) \to K^{-1}(X, Y) = K^1(X, Y)$$

和正合序列

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X,Y) & \longrightarrow & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(Y) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(Y) & \longleftarrow & K^1(X) & \longleftarrow & K^1(X,Y) \end{array}$$

7.1.5

设 $T: H_1 \to H_2$ 为 Hilbert 空间线性算子. 定义 T 的核 (kernel) 为 $\text{Ker } T = \{v \in H_1 | Tv = 0\}$. T 的像 (image) 为 $\text{Img } T = \{Tv | v \in H_1\}$. T 的余核 (cokernel) 为 $\text{Cok } T = H_2/\text{Img } T$.

称有界算子 $T: H_1 \to H_2$ 为 Fredholm 算子, 如果 T 的核 $\text{Ker } T$ 和余核 $\text{Cok } T$ 均为有限维向量空间. 以 $\mathfrak{F}(H)$ 记 H 的 Fredholm 算子集合 ([HR 00] 29 页, [Ati 67] 153 页).

设 H 是 Hilbert 空间. 记从 H 到 H 的有界算子集合为 $\mathfrak{B}(H)$. 从 H 到 H 的紧算子集合记为 $\mathfrak{K}(H)$, 则 $\mathfrak{K}(H)$ 是 C* 代数的理想. 称取商所得之 C* 代数 $\mathfrak{B}(H)/\mathfrak{K}(H)$ 为 Calkin 代数, 并记之为 $\mathfrak{Q}(H)$. 有正合序列

$$0 \to \mathfrak{K}(H) \to \mathfrak{B}(H) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{Q}(H) \to 0.$$

定理 7.1.4(Atkinson) $T \in \mathfrak{B}(H)$ 是 Fredholm 算子当且仅当 $\pi(T)$ 在 $\mathfrak{Q}(H)$ 中可逆.

推论 7.1.1 $\mathfrak{F}(H)$ 是 $\mathfrak{B}(H)$ 的开子集.

证明见 [HR 00] 2.1.4, 2.1.6.

定义 Fredholm 算子 T 的指标为

$$\text{Index}(T) = \dim(\text{Ker } T) - \dim(\text{Cok } T).$$

命题 7.1.1 (1) 若 S, T 是 Fredholm 算子, 则 ST 是 Fredholm 算子, 并且

$$\text{Index}(ST) = \text{Index}(S) + \text{Index}(T).$$

(2) 若 T 是 Fredholm 算子, 则 T^* 是 Fredholm 算子, 并且

$$\text{Index}(T^*) = -\text{Index}(T).$$

(3) 若 T 是 Fredholm 算子, K 是紧算子, 则 $T + K$ 是 Fredholm 算子, 并且 $\text{Index}(T + K) = \text{Index}(T)$.

(4) Index: $\mathfrak{F}(H) \to \mathbb{Z}$ 是连续函数.

证明见 [HR 00] 2.1.5, 2.1.6.

7.1.6

设 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间. 以 $\mathscr{V}(X)$ 记所有 X 上的向量丛所组成的集合. X 上的向量丛同构类所组成的集合记为 $\text{Vect}(X)$. X 的 K 群 $K(X)$ 是指 $\text{Vect}(X)$ 的 Grothendiech 群. 映射

$$\mathscr{V}(X) \to \text{Vect}(X) \to K(X)$$

的合成记为 $E \mapsto [E]$.

设 H 是可分 Hilbert 空间 (separable Hilbert space). 以 $\mathfrak{F}(H)$ 记 H 的 Fredholm 算子集合. 设 $T: X \to \mathfrak{F}(H)$ 为连续映射.

(1) 存在 H 的闭子空间 V 使得 $\dim(H/V) < \infty$ 及对任意 $x \in X$ 有 $V \cap \operatorname{Ker} T(x) = \{0\}$. 用投射 $pr_1 : X \times (H/V) \to X$ 得平凡向量丛. 由此所定 $K(X)$ 的元素记为 $[H/V]$.

(2) 设有 V 满足以上条件 (1). 记 $\cup_{x \in X} H/T(x)(V)$ 为 $H/T(V)$. 以 $\rho_x : H \to H/T(x)(V)$ 记投射. 用满射

$$X \times H \to H/T(V) : x, v \mapsto \rho_x(v)$$

给予 $H/T(V)$ 商拓扑, 则

$$H/T(V) \to X : \rho_x(v) \mapsto x$$

为 X 上的向量丛. 由此所定 $K(X)$ 的元素记为 $[H/T(V)]$.

(3) 若 H 有闭子空间 V, W 满足以上条件 (1), 则

$$[H/V] - [H/T(V)] = [H/W] - [H/T(W)].$$

故由连续映射 $T : X \to \mathfrak{F}(H)$ 可定义指标

$$\operatorname{Index} T := [H/V] - [H/T(V)] \in K(X).$$

(4) 设有连续映射 $\mathscr{T} : X \times [0,1] \to \mathfrak{F}(H)$, 并设 $T_0 = \mathscr{T}(\bullet, 0)$, $T_1 = \mathscr{T}(\bullet, 1)$. 称 T_0 同伦于 T_1. 则 $\operatorname{Index} T_0 = \operatorname{Index} T_1$. 从 X 到 $\mathfrak{F}(H)$ 的连续映射同伦类集合记为 $[X, \mathfrak{F}(H)]$.

关于以上详情见 [Ati 67] 155~159 页.

定理 7.1.5 设 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间, 并设 H 是可分 Hilbert 空间, 则指标

$$\operatorname{Index} : [X, \mathfrak{F}(H)] \to K(X)$$

为同构. ([Ati 67] Them A.1, 154 页.)

7.1.7

从拟微分算子的性质 Atiyah 联想出这样的定义 ([Ati 69]). 设 X 为紧 Hausdorff 拓扑空间. X 上的椭圆算子 (elliptic operator) 是指 $(H_1, \rho_1, H_2, \rho_2, F)$, 其中: (1) H_1, H_2 是 Hilbert 空间, (2)$j = 1, 2$, $\rho_j : C(X) \to \mathfrak{B}(H_j)$ 是 *- 表示 (3) Fredholm 算子 $F : H_1 \to H_2$ 满足以下条件: 对任意 $f \in C(X)$, $\rho_2(f)F - F\rho_1(f) : H_1 \to H_2$ 为

紧算子. 因为 F 是 Fredholm 算子, 固有算子 $G: H_1 \to H_2$ 使得 $GF-1$, $FG-1$ 均为紧算子. 以 $\mathrm{Ell}(X)$ 记 X 上的椭圆算子集合.

$X \to K(X)$ 是反变函子并有指标同构 $\mathrm{Index}: [X, \mathfrak{F}(H)] \to K^0(X)$. 我们希望模仿 "同调–上同调" 这一种 "共变 - 反变" 关系, 构造一个共变函子 $X \to K_0(X)$ 和一个类似指标的映射.

Atiyah ([Ati 69]) 使用拓扑空间 X 的 Spanier-Whitehead 对偶 DX 定义 $K_0(X)$ 为 $K^0(DX)$, 并证明存在满射

$$\mathrm{Ell}(X) \to K_0(X).$$

文章设有详证. 现在这已由以下的 Kasparov 理论代替.

7.1.8

称拓扑群 G 作用在拓扑空间 X 上, 或说 X 有 G 的作用 (action), 或说 X 是 G-空间 (G-space), 如果有连续映射

$$G \times X \to X : g, x \mapsto gx$$

使得 (1) $1_G x = x$ (1_G 为 G 的单位元), (2) $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$, $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$.

设 X, Y 为 G-空间, 称映射 $f: X \to Y$ 为 G-映射若对任一 $g \in G$ 有 $f(gx) = gf(x)$. 如果 G-映射 f 为线性空间 X, Y 的线性算子, 则称 f 为 G-算子.

设有向量丛 $p: E \to X$ 及拓扑群 G 使得: (1)E, X 为 G-空间和 p 为 G- 映射, (2) 对 $x \in X$ 和 $g \in G$, 由 G 在 E 的作用所决定的映射

$$E_x \to E_{gx} : v \mapsto gv$$

是线性的, 则称 E 为 G-协变向量丛 (G-equivariant vector bundle) 或 G-向量丛 ([Ati 67] 35 页).

设 X 为紧 Hausdorff G-空间. X 上的 G-向量丛同构类所组成的集合记为 $\mathrm{Vect}_G(X)$. 以直和为加法此集合为交换么半群. 定义 $K_G(X)$ 为 Grothendieck 群 $G(\mathrm{Vect}_G(X))$ ([Ati 67] 65 页; [Seg 68]).

以下从其他的观点再论 G-向量丛. 从拓扑群 G 在拓扑空间 X 上的作用可得映射

$$G \times G \times X \underset{d_2}{\overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}}} G \times X \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} X,$$

其中 $d_0(g_1, g_2, x) = (g_1, g_2 x)$, $d_1(g_1, g_2, x) = (g_1 g_2, x)$, $d_2(g_1, g_2, x) = (g_2, x)$, $\delta_0(g, x) = gx$, $\delta_1(g, x) = x$. 还有 $s_0 : X \to G \times X : x \mapsto (1, x)$. 直接计算得 $\delta_1 d_2 = \delta_1 d_1$, $\delta_0 d_2 = \delta_1 d_0$, 同时作用的条件 $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$ 给出 $\delta_0 d_0 = \delta_0 d_1$.

称向量丛 $p: E \to X$ 为 G-协变向量丛 (G-equivariant vector bundle), 如果有同构

$$\phi : \delta_1^* E \xrightarrow{\approx} \delta_0^* E$$

使得以下为两交换图.

$$\begin{array}{ccc}
s_0^*\delta_1^*E & \xrightarrow{s_0^*\phi} & s_0^*\delta_0^*E \\
{\scriptstyle\approx}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\approx} \\
E & \xrightarrow{id} & E
\end{array}$$

图 1

$$\begin{array}{ccccccc}
d_2^*\delta_1^*E & \xrightarrow{d_2^*(\phi)} & d_2^*\delta_0^*E & \xrightarrow{=} & d_0^*\delta_1^*E & \xrightarrow{d_0^*(\phi)} & d_0^*\delta_0^*E \\
{\scriptstyle=}\big\downarrow & & & & & & \big\downarrow{\scriptstyle=} \\
d_1^*\delta_1^*E & & & \xrightarrow{d_1^*(\phi)} & & & d_1^*\delta_0^*E
\end{array}$$

图 2

图 2 称为上链条件 (cocycle condition), 又可写作 $d_0^*(\phi) \circ d_2^*(\phi) = d_1^*(\phi)$. 这个定义完全使用映射, 是可以用在 X 上的层 (sheaf) ([HTT 08] §9.10).

为了明白 ϕ 的意义, 看看在点 (g, x) 的纤维, 由 $\delta_\bullet^* E$ 的定义知 $\delta_1^* E_{(g,x)} = E_x$ 和 $\delta_0^* E_{(g,x)} = E_{gx}$. 故 ϕ 定义了同构

$$\phi_{(g,x)} : E_x \xrightarrow{\approx} E_{gx}.$$

这正是 G-向量丛原来的定义的要求. 图 1, 图 2 是说 ϕ 定义了 G 在 E 上的作用使得 $p: E \to X$ 是 G-映射.

7.2 C* 代数的 K 群

按 Gelfand-Naimark 定理, 若 A 为带单元的交换 C* 代数, 则有 Hausdorff 紧拓扑空间 X 使得 A 同构于由 X 上的连续函数所组成的 C* 代数 $C(X)$ (见 [Li 86] 定理 2.1.4). 我们可以进一步说这个关系: Hausdorff 紧拓扑空间范畴反等价于带单元的交换 C* 代数范畴. 在这个反等价下, 对应于 X 的 K 群 $K^i(X)$ 应有 C* 代数的 K 群使得

$$K^i(X) = K_i(C(X)).$$

我们在本节为一个不必是交换的 C* 代数 A 定义 K 群 $K_i(A)$ 使得当 A 是交换 C* 代数 $C(X)$ 时以上等式成立. 这可以说是非交换几何的一个基本观点, 就是把一个对交换 C* 代数成立的公式、构造方法或定理推广到不必是交换的 C* 代数.

7.2.1

设 A 是 C* 代数. 以 A^+ 记 $A\times\mathbb{C}$. 引入乘法

$$(a,\lambda)(b,\mu):=(ab+\lambda b+\mu a,\lambda\mu).$$

则 A^+ 是以 $(0,1)$ 为单位元的 C* 代数. A 为 A^+ 的理想, $A^+/A\simeq\mathbb{C}$. 以 π 记映射 $A^+\to A^+/A\simeq\mathbb{C}$.

设 A 是 $*$ 代数. 称 $p\in A$ 为投射 (projection) 若 $p=p^*=p^2$. 称投射 p,q 为正交 (orthogonal) 若 $pq=0$. 称投射 p,q 为等价若有 $v\in A$ 使 $p=v^*v$, $q=vv^*$, 以 $p\sim q$ 记之. 以 $[p]$ 记 p 的等价类. 设 A 是赋范 * 代数. 称 A 内投射 p,q 为同伦如果有连续映射 $\mathscr{P}:[0,1]\to A$ 使 $\mathscr{P}(0)=p$, $\mathscr{P}(1)=q$, 所有 $\mathscr{P}(t)$ 均为投射, 以 $p\sim_h q$ 记之.

设 A 是 C* 代数. $\mathbb{M}_n(A)=\{(a_{ij})|a_{ij}\in A\}$ 记 $n\times n$ 矩阵代数. 取 $\mathbb{M}_\infty(A):=\cup_{n=1}^\infty\mathbb{M}_n(A)$. 由 $\mathbb{M}_\infty(A)$ 内的投射的等价类所组成的集合记为 $V(A)$. 以加法

$$[p]+[q]:=\left[\begin{pmatrix}p&0\\0&q\end{pmatrix}\right]$$

$V(A)$ 为交换半群. 从 $V(A)$ 得出的 Grothendieck 群记为 $G(A)$. 从映射 $\pi:A^+\to\mathbb{C}$ 得出群同态 $\pi_*:G(A^+)\to G(\mathbb{C})$. 定义 K- 群为以下交换群:

$$K_0(A):=\mathrm{Ker}\ \pi_*.$$

可以证明 (见 [Weg 93] Prop 6.2.7):

(1) 对 $K_0(A)$ 任一元有正整数 k 使此元可写为 $[p]-[q]$, 其中 p,q 为 $\mathbb{M}_k(A^+)$ 内的投射, $p-q\in\mathbb{M}_k(A)$.

(2) 如果在 $K_0(A)$ 内有 $[p]-[q]=0$, 则有 k 及 $m\leqslant n$ 使得 $p,q\in\mathbb{M}_k(A^+)$, 并且在 $\mathbb{M}_{k+n}(A^+)$ 内有

$$\begin{pmatrix}p&0\\0&p_m\end{pmatrix}\sim_h\begin{pmatrix}q&0\\0&p_m\end{pmatrix}.$$

7.2.2

C* 代数 A 的同纬像 (suspension) 是指 $SA:=C_0((-1,1))\otimes A$.

G^o 记拓扑群 G 的单位元连通分支. 考虑酉矩阵群 $U_n(A^+):=\{u\in\mathbb{M}_n(A^+)|u^*u=1=uu^*\}$. 设 $U_\infty(A^+):=\cup_{n=1}^\infty U_n(A^+)$.

定理 7.2.1　对每一 C* 代数 A 存在同构

$$\theta_A:U_\infty(A^+)/U_\infty(A^+)^o\to K_0(SA)$$

使得从同态 $\alpha:A\to B$ 得交换图

$$\begin{array}{ccc} U_\infty(A^+)/U_\infty(A^+)^o & \xrightarrow{\alpha_*} & U_\infty(B^+)/U_\infty(B^+)^o \\ \downarrow{\scriptstyle \theta_A} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_B} \\ K_0(SA) & \xrightarrow[S\alpha_*]{} & K_0(SB) \end{array}$$

(见 [Weg 93] Thm 7.2.5).

7.2.3

由所有满足以下条件的数列 $x = (x_n)$ 所组成的集合记为 $\mathscr{C}^2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

以内积

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

$\mathscr{C}^2$ 为 Hilbert 空间. 以 $\mathscr{C}^2 \to \mathscr{C}^2$ 的紧算子所组成的 C* 代数记为 $\mathbb{K}$.

设有 C* 代数映射 $f_0, f_1 : A \to B$. 若有连续映射 $f : A \times [0,1] \to B$ 使得 $f(a,0) = f_0(a)$, $f(a,1) = f_1(a)$, 对所有 t, $f(\cdot, t)$ 为 C* 代数映射, 则称 f_0, f_1 为同伦的 (homotopic).

定义 $K_1(A) := K_0(SA)$.

定理 7.2.2 1. K_j $j = 0, 1$ 是从 C* 代数范畴到交换群范畴的共变函子.

2. 设 $f_0, f_1 : A \to B$ 为同伦 C* 代数映射, 则 $f_{0*} = f_{1*} : K_j(A) \to K_j(B)$, $j = 0, 1$.

3. 从同态 $A \to A \otimes \mathbb{K} : a \mapsto a \otimes e_{11}$ 得同构 $K_j(A) \simeq K_j(A \otimes \mathbb{K})$, $j = 0, 1$. (称此性质为 K_j 的稳定性.) e_{11} 是 $\mathbb{K}$ 里的秩 $= 1$ 的投射.

证明见 [Weg 93] Prop 6.2.4, Thm 6.4.3, Cor 6.2.1; Prop. 7.1.6, Cor 7.1.9.

定理 7.2.3 对每一 C* 代数 A, 存在同构

$$\beta_A : K_0(A) \to K_1(SA)$$

使得从同态 $\alpha : A \to B$ 得交换图

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{\alpha_*} & K_0(B) \\ \downarrow{\scriptstyle \beta_A} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_B} \\ K_1(SA) & \xrightarrow[S\alpha_*]{} & K_1(SB) \end{array}$$

这是 K 理论重要的 Bott 周期 (Bott periodicity) 定理 (见 [Weg 93] Chap 9). 定义

$$K_n(A) := K_0(S^n A).$$

不过按以上定理实际上只有 K_0, K_1, 因为 $K_2(A) = K_0(S^2 A) = K_1(SA) = K_0(A)$.

Bott(1923 年 ~2005 年) 生于布达佩斯, 哈佛大学教授, 2000 年获 Wolf 奖.

定理 7.2.4　设有 C* 代数 A 的理想 J, 则存在群同态

$$\delta : K_1(A/J) \to K_0(J),$$

使从以下序列

$$0 \to J \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\rho} A/J \to 0$$

得出正合序列

$$K_1(J) \xrightarrow{\iota_*} K_1(A) \xrightarrow{\rho_*} K_1(A/J) \xrightarrow{\delta} K_0(J) \xrightarrow{\iota_*} K_0(A) \xrightarrow{\rho_*} K_0(A/J)$$

(见 [Weg 93] Thm 6.3.2, Thm 7.1.12, Thm 8.2.1).

7.3　C* 代数的解析 K 同调群

7.3.1

设 A 是 C* 代数. 一个 Fredholm A- 模是指 (H, ρ, F), 其中: (1) H 是 Hilbert 空间, (2) $\rho : A \to \mathfrak{B}(H)$ 是 $*$- 表示 (连续 $*$ 代数同态), (3) 有界算子 $F : H \to H$ 满足以下条件: 对任意 $a \in A$, $\rho(a)F - F\rho(a)$, $\rho(a)(FF^* - 1)$, $\rho(a)(F^*F - 1)$, 均为 H 上的紧算子. 称 Fredholm 模 (H, ρ, F) 为退化 Fredholm 模 (degenerate Fredholm module), 如果对任意 $a \in A$ 有 $\rho(a)F = F\rho(a)$, $\rho(a)FF^* = \rho(a)$, $\rho(a)F^*F = \rho(a)$.

定义加法如下:

$$(H, \rho, F) \bigoplus (H', \rho', F') = (H \bigoplus H', \rho \bigoplus \rho', F \bigoplus F').$$

称 Fredholm 模 (H', ρ', F') 酉等价于 Fredholm 模 (H, ρ, F), 若有酉同构 $U : H' \to H$ 使得 $\rho' = U^* \rho U$ 及 $F' = U^* F U$.

设有连续映射 $\mathscr{F} : [0, 1] \to \mathfrak{B}(H)$ 使得所有 $(H, \rho, \mathscr{F}(t))$ 为 Fredholm 模, 则称 $(H, \rho, \mathscr{F}(0))$ 算子同伦于 $(H, \rho, \mathscr{F}(1))$.

若 x 记 Fredholm 模, 则设

$$[x] = \{\text{Fredholm 模 } y\ : y \sim x\}.$$

由所有 A 上的 Fredholm 模等价类 $[x]$ 所组成的集合 $K^0(A)$ 以 $\bigoplus$ 为加法成为交换群 (见 [HR 00] 8.2.5, 8.2.8). 称此为 K^0 同调群.

$K^0(A)$ 和上节 $K_0(A)$ 有对偶关系. 设 A 有单位元. 取投射 $P \in \mathbb{M}_n(A)$, 表示 $\rho : A \to \mathfrak{B}(H)$. 设 $FF^* - 1$ 及 $F^*F - 1$ 为紧算子. 扩充 ρ 为 $\rho_n : \mathbb{M}_n(A) \to \mathfrak{B}(H \bigoplus \cdots \bigoplus H)$. 可以证明

$$T = \rho_n(P) \begin{pmatrix} F & & \\ & \ddots & \\ & & F \end{pmatrix} + \rho_n(1 - P)$$

是 Fredholm 算子. 这样我们可以用下式

$$K_0(A) \times K^0(A) \to \mathbb{Z} : ([P], [H, \rho, F]) \mapsto \text{Index}\, T.$$

来定义对偶映射.

7.3.2

设 A 是 C* 代数. 考虑集合 $\mathfrak{P}(A)$, 其元素为 (H, ρ, P), 其中: (1) H 是 Hilbert 空间, (2)$\rho : A \to \mathfrak{B}(H)$ 是表示, (3) 有界算子 $P : H \to H$ 满足以下条件: 对任意 $a \in A$, $\rho(a)(P^2 - P)$, $\rho(a)(P - P^*)$, $P\rho(a) - \rho(a)P$ 均为 H 上的紧算子. $\mathfrak{P}(A)$ 内的退化元 (或称平凡元 degenerate or trivial element) 是指 (H, ρ, P) 使得对任意 $a \in A$ 有 $\rho(a)P^2 = \rho(a)P$, $\rho(a)P = \rho(a)P^*$, $P\rho(a) = \rho(a)P$.

如前段一样, 可以定义加法 $\bigoplus$、酉等价、算子同伦及等价关系 $\sim$. 可以证明由 $\sim$ 等价类所组成集合为交换群, 记之为 $K^1(A)$. 此群和上节 $K_1(A)$ 有对偶关系. 设 A 有单位元. 取酉矩阵 $U \in \mathbb{M}_n(A)$ 及 $[H, \rho, P] \in K^1(A)$, 则

$$T = \rho_n(U) \begin{pmatrix} P & & \\ & \ddots & \\ & & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - P & & \\ & \ddots & \\ & & 1 - P \end{pmatrix}$$

是 Fredholm 算子. 这样我们可以用下式

$$K_1(A) \times K^1(A) \to \mathbb{Z} : ([U], [H, \rho, P]) \mapsto \text{Index}\, T.$$

来定义对偶映射.

C* 代数 A 的同纬像 (suspension) 是指 $SA := C_0((-1, 1)) \otimes A$. 可证明存在同构

$$K^1(A) \xrightarrow{\approx} K^0(SA).$$

参看 [HR 00] 8.4.3, 9.5.2.

一般教本背着 Brown-Douglas-Fillmore 定理这个历史的包袱, 要解译与扩张的复杂关系. 我们不谈这些. 我们这里的 Fredholm 模和 [HR 00] 中所定义的不同, [HR 00]中是分次模 (graded module).

7.4 KK 理论

7.4.1

设 A 是 C^* 代数. 若复向量空间 E 同时是右 A 模并有映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E\to A$ 满足以下条件: 对 $x,y,z\in E$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $a\in A$ 有

1. $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$, $\langle x,\lambda y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$,
2. $\langle x,y\rangle^*=\langle y,x\rangle$,
3. $\langle x,ya\rangle=\langle x,y\rangle a$,
4. $\langle x,x\rangle\geqslant 0$, 若 $\langle x,x\rangle=0$ 则 $x=0$ 及 E 以范数 $\|x\|=\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}$ 为完备空间,

则称 E 为 Hilbert A-模. 见 [Bla 86] 13.1.

设 E 为 Hilbert A-模. 若 $T:E\to E$ 为有界线性算子, 又是 A 模同态 ($T(xa)=T(x)a$), 并有伴随映射 $T^*:E\to E$ 使得 $\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle$, 则称 T 为 Hilbert 模的有界算子. 以 $\mathbb{B}(E)$ 记 E 的所有有界 Hilbert 模算子.

设 E 为 Hilbert A-模. 用 $x,y\in E$ 定义算子

$$\theta_{x,y}:E\to E:z\mapsto x\langle y,z\rangle,$$

则 $\theta_{x,y}$ 的秩为 1 并属于 $\mathbb{B}(E)$. 由所有这样的 $\theta_{x,y}(x,y\in E)$ 的线性组合所组成的集合是 $\mathbb{B}(E)$ 中的 $*$ 理想. 我们把这个理想的元素看作 E 的“有限秩”算子. 以 $\mathbb{K}(E)$ 记这个理想在 $\mathbb{B}(E)$ 内的拓扑闭封. 我们把 $\mathbb{K}(E)$ 的元素看作 E 的紧算子. 见 [Bla 86] §13.2.

设 A,B 是 C^* 代数. 一个 Kasparov (A,B)-模是指 (E,ρ,F), 其中: (1) E 是 Hilbert B-模, (2)$\rho:A\to\mathbb{B}(E)$ 是 $*$ 同态, (3) $\mathbb{B}(E)$ 内算子 $F:E\to E$ 满足以下条件: 对任意 $a\in A$, $\rho(a)F-F\rho(a)$, $\rho(a)(FF^*-1)$, $\rho(a)(F^*F-1)$ 均属于 $\mathbb{K}(E)$. ([Kas 81] 称 (E,ρ,F) 为闭链.) 称 Kasparov (A,B)- 模 (E,ρ,F) 为退化 Kasparov 模 (degenerate Kasparov module), 如果对任意 $a\in A$ 有 $\rho(a)F=F\rho(a)$, $\rho(a)FF^*=\rho(a)$, $\rho(a)F^*F=\rho(a)$. 如前面一样可以定义加法 $\bigoplus$、酉等价、算子同伦及等价关系 $\sim$. 可以证明由 $\sim$ 等价类所组成集合为交换群, 记之为 $KK^0(A,B)$. 见 [Bla 86] §17.1.1, §17.3.1. 我们这里的 Kasparov 模和 [Bla 86] 不同, [Bla 86] 中的是分次模 (graded module).

考虑集合其元素为 (E,ρ,P), 其中: (1) E 是 Hilbert B-模, (2)$\rho:A\to\mathbb{B}(E)$ 是 $*$ 同态, (3) $\mathbb{B}(E)$ 内算子 $P:E\to E$ 满足以下条件: 对任意 $a\in A$, $\rho(a)(P^2-$

$P)$, $\rho(a)(P-P^*)$, $P\rho(a)-\rho(a)P$, 均属于 $\mathbb{K}(E)$. 此集合内的退化元 (或称平凡元 degenrate or trivial element) 是指 (E,ρ,P) 使得对任意 $a\in A$ 有 $\rho(a)P^2=\rho(a)P$, $\rho(a)P=\rho(a)P^*$, $P\rho(a)=\rho(a)P$. 如前段一样可以定义加法 $\bigoplus$、酉等价、算子同伦及等价关系 $\sim$, 则由 $\sim$ 等价类所组成集合为交换群, 记之为 $K^1(A,B)$. 可以证明

$$KK^1(A,\mathbb{C})=K^1(A),\ \ KK^1(\mathbb{C},B)\overset{\approx}{\to}K_1(B).$$

也就是说 $KK^\bullet$ 同时处理 $K^\bullet$ 和 $K_\bullet$, 而且 $KK^\bullet(A,B)$ 对 A 是反变函子, 对 B 是共变函子, 即

从同态 $f:A\to A'$ 用 $(E,\rho,T)\mapsto(E,\rho\circ f,T)$ 得同态 $KK^\bullet(A',B)\to KK^\bullet(A,B)$.

从同态 $B\to B'$ 用 $(E,\rho,T)\mapsto(E\hat{\otimes}_B B',\rho\hat{\otimes}1,T\hat{\otimes}1)$ 得同态 $KK^\bullet(A,B)\to KK^\bullet(A,B')$.

7.4.2

K 理论发展出来是为了计算拟微分算子指标. 用分次空间是比较有效率的.

Clifford 代数 C_n 是指复数域上有限维带单位元的 $*$ 代数, 它有满足以下条件的生成元 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$:

$$\varepsilon_i\varepsilon_j+\varepsilon_j\varepsilon_i=2\delta_{ij},\quad \varepsilon_i^*=\varepsilon_i.$$

类似地 Clifford 代数 C'_n 是指复数域上有限维带单位元的 $*$ 代数, 它有满足以下条件的生成元 $e_1,\cdots,e_n$:

$$e_ie_j+e_je_i=-2\delta_{ij},\quad e_i^*=-e_i,$$

亦记 C_n 为 $C_{n,0}$, C'_n 为 $C_{0,n}$.

一个 $\mathbb{Z}/2$- 分次复向量空间 V 是指 V 有分解为两个子空间直和: $V=V^0\bigoplus V^1$. 我们亦可以说 V 有自同构 γ 使得 $\gamma^2=1$; 此时可取 V^0 为由 γ 特征直为 1 的特征向量所生成的子空间, V^1 为由 γ 特征直为 -1 的特征向量所生成的子空间.

设 n 为正整数. 一个 n-分次复向量空间 V 是指 V 有自同态 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 满足条件 $\varepsilon_i\varepsilon_j+\varepsilon_j\varepsilon_i=2\delta_{ij}$. 例子: X 是一个测度空间, V 是 $L^2(X,C_n)$. 用 C_n 的生成元右乘定义所需算子.

我们可以适当地定义分次 Hilbert 空间、分次 C* 代数、分次同态、分次张量积 $\hat{\otimes}$, 见 [HR 00] Appendix A.

设 A,B 是 $\mathbb{Z}/2$-分次 C* 代数. 一个 $\mathbb{Z}/2$-分次 Kasparov (A,B)-模是指 (E,ρ,F), 其中: (1) $E=E^0\bigoplus E^1$ 是 $\mathbb{Z}/2$-分次 Hilbert B- 模, (2)$\rho:A\to\mathbb{B}(E)$ 是一个保持分次 $*$-同态, (3) $\mathbb{B}(E)$ 内奇算子 $F:E\to E$, 即

$$F=\begin{pmatrix}0 & F^0\\ F^1 & 0\end{pmatrix},$$

其中 $F^0 : E^1 \to E^0$, $F^1 : E^0 \to E^1$. 要求满足以下条件: 对任意 $a \in A$, $\rho(a)F - (-1)^{\deg a}F\rho(a)$, $\rho(a)(FF^* - 1)$, $\rho(a)(F^*F - 1)$, 均属于 $\mathbb{K}(E)$.

如上定义由 $\mathbb{Z}/2$- 分次 Kasparov (A, B)- 模等价类所组成集合之交换群为 $KK^0(A, B)$. 再用 Clifford 代数定义 $KK^n(A, B) = KK^0(A, B\hat{\otimes}C_n)$, $n > 0$.

定理 7.4.1 (1) 设 I 为 A 的理想, 则有 6 项正合序列

$$\begin{array}{ccccc} KK^0(B,I) & \longrightarrow & KK^0(B,A) & \longrightarrow & KK^0(B,A/I) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ KK^1(B,A/I) & \longleftarrow & KK^1(B,A) & \longleftarrow & KK^1(B,I) \end{array}$$

(2) 存在双线性映射

$$KK^0(A, D) \times KK^0(D, B) \to KK^0(A, B)$$

使得 $KK^0(A, A)$ 是一个带单位元的环.

详情见 [Kas 81], [Bla 86]§18.

7.4.3

设 G 为 Hausdorff、第二可数、局部紧拓扑群. 利用卷积把 $L^1(G)$ 看作 $L^2(G)$ 的算子代数. 把这个算子代数对算子范数作完备化所得的代数称为 G 的已约 C* 代数 (reduced C* algebra of G), 并纪之为 $C^*_r(G)$. 问: 怎样算 $K_j(C^*_r(G))$, $j = 0, 1$?

G 的已约 C* 代数与 G 的表示有密切的关系. 作为例子可看 p-adic 群的情形 [Ply 90].

设 G 作用在拓扑空间 X, Y 上. 又设有 G-映射 $f_0, f_1 : X \to Y$. 若有连续映射 $f : X \times [0, 1] \to Y$ 使得 $f(x, 0) = f_0(x)$, $f(x, 1) = f_1(x)$, 对所有 t, $f(\cdot, t)$ 为 G- 映射, 则称 f_0, f_1 为 G-同伦的 (G-homotopic).

设有 G 在拓扑空间 X 上的作用

$$G \times X \to X : g, x \mapsto gx.$$

若对任一 $x \in X$ 存在 x 在 X 内的开邻域 U 使得对 $(g, u) \in G \times U$ 有 $gu \in U$, G 的紧子群 H 及 G-映射 $\rho : U \to G/H$, 则称此为 G 在 X 上的固有作用 (proper action), 亦说 X 是固有 G 空间 (proper G-space).

可以证明: 存在固有 G 空间 $\underline{E}G$ 使得: 若 X 为固有 G 空间, 则有 G-映射 $f : X \to \underline{E}G$, 并且若另有 G-映射 $f' : X \to \underline{E}G$, 则 f, f' 为 G- 同伦的. 称 $\underline{E}G$ 为泛固有 G 空间 (universal proper G-space).

若固有 G 空间 X 有紧商空间 $G\backslash X$, 则称 X 为 G-紧固有 G 空间 (G-compact G-proper space).

设 X 为 G-紧固有 G 空间. X 上的一个 G-协变 (G-equivariant) 椭圆算子是指 (H_+, H_-, F), 其中

(1) G 在 Hilbert 空间 H_+, H_- 上有酉表示; C* 代数 $C_0(X)$ 在 $H_\pm$ 上有 G-共变表示 $\pi_\pm$.

(2) $F : H_+ \to H_-$ Hilbert 空间有界 G-算子.

(3) 从 $\phi \in C_0(X)$ 得紧算子 $\pi_-(\phi)F - F\pi_+(\phi)$.

(4) 存在有界 G- 算子 $Q : H_- \to H_+$ 使得对 $\phi \in C_0(X)$ 有紧算子 $\pi_-(\phi)(FQ - I)$, $\pi_+(\phi)(QF - I)$.

算子 $F_0, F_1 : H_+ \to H_-$ 是同伦的 (homotopic) 如果有连续映射 $\mathscr{F} : [0,1] \to \mathscr{L}(H_+, H_-)$ (算子范数拓扑) 使 $\mathscr{F}(0) = F_0$, $\mathscr{F}(1) = F_1$. 以 $K_0^G(X)$ 记由 G- 协变椭圆算子同伦类所组成的集合 (这是 Kasparov 的 $KK_G^0(C_0(X), \mathbb{C})$). Kasparov 证明这是个交换群并有 G 指标映射 $\mu : K_0^G(X) \to K_0(C_r^*(G))$.

由自共轭 G-协变椭圆算子同伦类所组成的集合 $K_1^G(X)$ 亦有同样结构.

设 Z 为 G-紧固有 G 空间. 定义

$$K_j^G(Z) = \varinjlim_X K_j^G(X), \quad j = 0, 1,$$

其中 $\varinjlim_X$ 指对所有 Z 内 G-紧固有 G 空间 X 求极限.

设 G 为 Hausdorff、第二可数、局部紧拓扑群, $\underline{E}G$ 为泛固有 G 空间, 则 Baum-Connes 猜想: G 指标映射

$$\mu : K_j^G(\underline{E}G) \to K_j(C_r^*(G))$$

是同构.

虽然 Baum-Connes 猜想在主要的情形已经被证明 ([CEN 03], [BHP 97], [Yu 00]), 但是关于 $K_j(C_r^*(G))$. 广义微分算子指标和非交换几何当然还有很多工作.

参 考 文 献

[ABV 92] J. Adams, D. Barbasch, D. Vogan, *The Langlands Classification and Irreducible Characters for Real Reductive Groups*, Birkhauser (1992).

[AM 66] L. Auslander, C. Moore, *Unitary representations of solvable Lie groups*, Memoirs AMS 82 (1966).

[AT 75] L. Auslander, R. Tolimieri, *Abelian harmonic analysis, theta functions and functional algebras on nilmanifolds*, Springer lect Notes Math 436 (1975).

[Ati 67] M. Atiyah, *K-theory*, Benjamin (1967).

[Ati 69] M. Atiyah, *Global theory of elliptic operators//* Proc Intl Symposium on Functional Analysis, University of Tokyo Press (1969) 21-30.

[BCH 94] P. Baum, A. Connes, N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C*-algebras//*C*-algebras, Contemp. Math. (AMS), **167**, (1994) 240-291.

[BHP 97] P. Baum, N. Higson, R. Plymen, *Une demonstration de la conjecture de Baum-Connes pour le groupe p-adique GL(n)*, C.R. Acad. Sci. Paris **325** (1997) 171-176.

[BGV 08] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer (2009).

[BL 94] J. Bernstein, V. Lunts, *Equivariant sheaves and functors*, Springer lect notes math **1578** (1994).

[Bla 86] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Springer (1986).

[Bjo 93] J. Björk, *Analytic D modules and applications*, Kluwer (1993).

[BC 49] S. Bochner, K. Chandrasekharan, *Fourier transformations*, Annals of Math. Studies, Princeton (1949).

[Bor 87] A. Borel, et. al., *Algebraic D modules*, Birkhauser (1987).

[Bor 08] A. Borel, *Automorphic forms on* $SL_2(\mathbb{R})$, Cambridge University Press (2008).

[Bot 57] R. Bott, *Homogeneous vector bundle*, Ann. of Math. **66** (1957) 203-248.

[Bre 10] C. Breuil, *The emerging p-adic Langlands programme*, Proceedings ICM 2010.

[BT 85] T. Bröcker, T. Tom Dieck, *Representaions of compact Lie groups*, Springer (1985).

[BK 93] C. Bushnell, P. Kutzko, *The admissible dual of GL(N) via compact open subgroups*, Annals of Math. Studies, vol. 129, Princeton University Press (1993).

[BH 06] C. Bushnell, G. Henniart, *Local Langlands conjecture for GL(2)*, Springer (2006).

[CZFI 11] O. Calin, 张德健, K. Furutani, C. Iwasaki, *Heat kernels for elliptic and sub-elliptic operators*, Birkhauser (2011).

[CEN 03] J. Chabert, S. Echterhoff, R. Nest, *The Connes-Kasparov conjecture for almost connected groups and for linear p-adic groups*, Pub IHES, **97**, (2003) 239-278.

[Che 64] 陈建功. 三角级数论. 上海科学技术出版社 (1964).

[CC 83] 陈省身, 陈维桓, 微分几何讲义, 北京大学出版社 (1983).

[Che 03] 陈维桓, 流形上的微积分, 高等教育出版社 (2003).

[CL 06] 朱础豪 C. Chu, 刘道明 T. Lau, *Jordan structures in harmonic functions and Fourier algebras on homogeneous spaces*, MATH ANN , **336**, (2006) 803-840.

[Cno 02] J. Cnops, *An introduction to Dirac Operators on manifolds*, Birkhauser (2002).

[Col 08] P. Colmez et. al., *Representations p-adiques de groupes p-adiques*, Asterisque **319, 330, 331** (2010).

[Con 94] A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press (1994).

[DZ 04] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Second order partial differential equations in Hilbert spaces*, Cambridge University Press (2004).

[Dav 90] E. Davies, *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge University press (1990).

[DE 09] A. Deitmar, S. Echterhoff, *Principles of harmonic analysis*, Springer Universitext (2009).

[Dle 54] H. Delange, *Generalisation du theoreme de Ikehara*, Ann. Scien. l'E.N.S. **71** (1954) 213-242.

[Del 90] P. Deligne, *Categories Tannakiennes* // The Grothendieck Festschrift volume 2, Birkhauser (1990) 111-196.

[DR 89] S. Doplicher, J. Roberts, *A new duality theory for compact groups*, Invent. Math. **98** (1989) 157-218.

[DSV 05] P. Delorme, H. Schlichtkrull, E. van den Ban, *Lie theory: Harmonic analysis on symmetric spaces - general Plancherel theorems*, Birkhauser (2005).

[Die 69] J. Dieudonne, *Treatise on analysis*, volume I to V, Academic Press (1969).

[Dix 77] J. Diximier, C* *algebra*, North Holland (1977).

[Dix 81] J. Diximier, *Von Neuman algebra*, North Holland (1981).

[DR 89] S. Doplicher, J. Roberts, *A new duality theory for compact groups*, Inven. Math. **98** (1989) 157-218.

[Duo 00] J. Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Amer.Math. Soc. (2000).

[Dug 66] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon (1966).

[DK 00] J. Duistermaat, J. Kolk, *Lie group*, Springer (2000).

[ES 92] M. Enock, J.-M. Schwartz, *Kac algebras and duality of locally compact groups*, Springer (1992).

[Esp 98] G. Esposito, *Dirac operators and spectral geometry*, Cambridge University Press (1998).

[Eym 64] P. Eymard, *L'algebra de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France, **92** (1964) 181-236.

[Fat 85] H. O. Fattorini, *Second order linear differential equations in Banach spaces*, North Holland (1985).

[FGV 00] H. Figurroa, J. Gracia-Bondia, J. Varilly, *Elements of noncommutative geometry*, Birkhauser (2000).

[Fle 86] M. Flensted-Jensen, *Analysis on non-Riemannian symmetric spaces*, Amer.Math. Soc. (1986).

[Fri 00] T. Friedrich, *Dirac operators in Riemannian geometry*, AMS (2000).

[FH 91] W. Fulton, J. Harris, *Representation theory*, Springer (1991).

[GV 88] R. Gangolli, V. Varadarajan, *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*, Springer (1988).

[Gil 94] P. Gilkey, *Invariance theory, heat equation and the Atiyah-Singer Index theorem*, CRC Press (1994).

[Got 04] J. Göttker-Schnetmann, *Äquivariante derivierte kategories rigider Räume*, Schrift. Math. Inst. Uni. Münster **31** (2004).

[Gra 08] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer (2008).

[Gra 09] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Springer (2009).

[Gri 12] A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS (2012).

[Gu 02] 谷超豪等, 数学物理方程, 高等教育出版社 (2002).

[HW 54] G. Hardy, F. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford (1954).

[Hel 78] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press (1978).

[Hel 84] S. Helgason, *Groups and Geometric Analysis*, Academic Press (1984).

[Hel 08] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*, Amer. Math. Soc. Math. Surveys and Monographs (2008).

[HR 00] N. Higson, J. Roe, *Analytic K homology*, Oxford (2000).

[HP 57] E. Hille, R. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, AMS (1957). (吴智泉译, 泛函分析与半群, 上海科学技术出版社 (1964)).

[Hir 78] F. Hirzebruch, *Topological methods in algebraic geometry*, Springer (1978).

[HS 71] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer (1971).

[HTT 08] R. Hotta, K. Takeuchi. T. Tanisaki, *D-modules, perverse sheaves and representation theory*, Birkhauser (2008).

[HHM 92] 项武义, 侯自新, 孟道骥, 李群讲义, 北京大学出版社 (1992).

[Hua 58] 华罗庚, 多复变函数论中的典型域的调和分析, 科学出版社 (1958).

[Hua 63] 华罗庚, 指数和的估计及其在数论中的应用, 科学出版社 (1963).

[Hua 75] 华罗庚, 数论导引, 科学出版社 (1975).

[HP 06] J. S. Huang, P. Pandzic, *Dirac operators in representation theory*, Birkhauser (2006).

[Hum 08] J. Humphreys, *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category $\mathcal{O}$*, Amer. Math. Soc. (2008).

[Jan 03] J. Jantzen, *Representations of algebraic groups* (second edition), Amer. Math. Society (2003).

[Jia 78] 江泽涵, 拓扑学引论, 上海科技出版社 (1978).

[Jos 02] J. Jost, *Partial differential equations*, Springer (2002).

[Jos 05] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Springer (2005).

[Kar 78] M. Karoubi, K *theory*, Springer (1978).

[Kas 81] G. Kasparov, *Operator K functor and extensions of* C^* *algebras*, Math. USSR Izvestija, **16** (1981) 513-572.

[Kau 77] W. Kaup, *Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds*, Math. Ann. 228 (1977), no. 1, 39–64.

[Kau 83] W. Kaup, *A Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces*, Math. Z. 183 (1983), no. 4, 503–529.

[Kel 55] J. Kelly, *General topology*, Van Nostrand (1955). (吴从析译, 一般拓扑学, 科学出版社 (1985)).

[Kna 88] A. Knapp, *Lie groups, Lie algebras and cohomology*, Princeton (1988).

[KV 95] A. Knapp, D. Vogan, *Cohomological Induction and unitary representations*, Princeton (1995).

[Kna 01] A. Knapp, *Representation theory of semisimple Lie group*, Princeton (2001).

[Kna 02] A. Knapp, *Lie groups : beyond an introduction*, Birhauser (2002).

[Kor 04] J. Korevaar. Jauberian Theory. Springer, 2004.

[Kun 83] 龚昇, 典型群上的调和分析, 科学出版社, (1983).

[LY 02] 黎景辉, 杨杰明, *Rational points in flag varieties over function fields*, J. Number Theory,

95 (2002) 142-149.

[LZ 14] 黎景辉, 赵春来, 模曲线引论, 北京大学出版社 (2014)

[LL 12] D. M. Liu, T. Lau, J. Ludwig, *Fourier-Stieltjes algebra of a topological group*, Advances of Mathematics **229**-3, (2012) 2000-2023.

[LM 90] H. Lawson, M. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton University Press, (1990).

[Lem 00] L. Lempert, *The Dolbeault complex in infinite dimensions.* Ⅲ, Invent. Math. 142 (2000), no. 3, 579–603.

[LW 11] 梁浩瀚 D. Leung, 王雅書 Y. Wang, *Local operator on* C^p, J. Math. Anal. Appl. , 381(2011), 308 − 314.

[Li 86] 李炳仁, 算子代数, 科学出版社 (1986).

[Li 12] Peter Li, *Geometric analysis*, Cambridge University Press (2012).

[Lu 63] 陆启铿, 典型流形与典型域, 上海科学技术出版社 (1963).

[Lus 90] G. Lusztig, *Interesection cohomology methods in representation theory*, Proc. International Congress Math. Kyoto (1990) 155-174.

[MS 93] P. Maisonobe, C. Sabbah, *D modules coherents et holonomes*, Hermann (1993).

[Mal 55] B. Malgrange, *Existene et approximation des solutions des equations aux derivees partielles*, Ann. Inst. Fouries Grenoble **6** (1955) 271-355.

[Mal 91] B. Malgrange, *Equations differentielles a coefficients polynomiaux*, Birkhauser (1991).

[Meb 89] Z. Mebkhout, *Le formalisme des six operations de Grothendieck pour les D modules coherent*, Hermann (1989).

[MW 08] C. Moeglin, J-L. Waldspurge, *Spectral Decomposition and Eisenstein Series*, Cambridge, 2008.

[MZ 55] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups*, Interscience (1955).

[MN 08] H. Moriyoshi, T. Natsume, *Operator algebras and geometry*, AMS (2008).

[Nar 73] R. Narasimhan, *Analysis on Real and complex manifolds*, North Holland (1973).

[Pet 54] I. Petrovsky, *Lectures on partial differential equations*, Interscience (1954).

[PW 13] M. Pereyra, L.Ward, *Harmonic analysis- from Fourier to Wavelets*, Amer. Math. Soc. (2013).

[Pie 84] J. P. Pier, *Amenable locally compact groups* , Wiley-Interscience (1984).

[Ply 90] R. Plymen, *Reduced C?-algebra for reductive p-adic groups*, J. Functional Anal. **88** (1990), 251-266.

[Rud 67] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Wiley (1967).

[Rud 87] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill (1987) (戴牧民等译, 实分析与复分析, 机械工业出版社出版 (2006).

[Rud 91] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill (1991).

[Sak 71] S. Sakai, C^* algebra and W^* algebras, Springer (1971).

[SS 90] L. Saper, M. Stern, *L^2-cohomology of arithmetic varieties*, Ann. of Math. (2) **132** (1990) 1-69.

[Sch 80] H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Springer (1980).

[Sch 71] W. Schmid, *On a conjecture of Langlands*, Ann. of Math. **93** (1971) 1-42.

[Sch 99] J-P. Schneiders, *Quasi-abelian categories and sheaves*, Memoires Soc. Math. France, **76** (1999).

[Sch 11] P. Schneider, *p-Adic Lie Groups*, Springer (2011).

[Seg 68] G. Segal, *Equivariant K-theory*, Pub. Math. IHES **34** (1968) 129-151.

[Sep 07] M. Sepanski, *Compact Lie groups*, Springer (2007).

[Shi 94] G. Shimura, *Differential operators, holomorphic projection and singular forms*, Duke Math. J. **76** (1994) 141-173.

[Sri 08] V. Srinivas, *Algebraic K-theory*, Birkhauser (2008).

[Ste 51] N. Steenrod, *Topology of fibre bundles*, Princeton (1951).

[SW 71] E. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton (1971).

[SS 03] E. Stein, R. Shakarchi, *Fourier Analysis*, Princeton (2003).

[Sti 59] W. Stinespring, *Integration theorems for gauges and duality for unimodular locally compact groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959) 15-56.

[Sug 90] M. Sugiura, *Unitary representations and harmonic analysis*, North Holland (1990).

[TC 61] 吉洪诺夫, 萨马尔斯基, 数学物理方程, 人民教育出版社 (1961).

[Tha 92] B. Thaller, *The Dirac equation*, Springer (1992).

[Tha 98] S. Thangavelu, *Harmonic analysis on the Heisenberg group*, Birkhauser (1998).

[Tol 76] G. Tolstov *Fourier Series*, Dover (1976).

[Tre 67] F. Treves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press (1967).

[Tre 75] F. Treves, *Basic partial differential equations*, Academic Press (1975).

[Var 74] V. Varadarajan, *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representation*, Springer (1984).

[Var 77] V. Varadarajan, *Harmonic analysis on semisimple Lie Groups*, Springer Lect. Notes in Math. (1977).

[VK 91] N.Vilenkin, A. Klimyk, *Representation of Lie Groups and Special Functions*, volumes 1, 2, 3, Springer (1991).

[Wal 73] N. Wallach, *Harmonic analysis on homogeneous spaces*, Marcel Dekker (1973).

[Wal 88] N. Wallach, *Real reductive groups*, volumes 1, 2, Academic Press (1988).

[WG 65] 王竹溪, 郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社 (1965).

[War 83] F. Warner, *Foundations of differential manifolds and Lie groups*, Springer (1983).

[Weg 93] N. Wegge-Olsen, K-*theory and* C* *algebra*, Oxford (1993).

[Wie 32] N. Wiener, *Tauberian theorems*, Annals of math **33** (1932) 1-100.

[XY 86] 夏道行, 杨亚立, 线性拓扑空间引论, 上海科学技术出版社 (1986).

[Xia 09] 夏道行等, 泛函分析第二教程, 高等教育出版社 (2009).

[Xu 01] 许以超, 李群与 Hermite 对称空间, 科学出版社 (2001).

[Yen 60] 严志达, 李群和微分几何, 人民教育出版社 (1960).

[YX 85] 严志达, 许以超, Lie 群及其 Lie 代数, 高等教育出版社 (1985).

[Yos 80] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer (1980).

[Yu 00] 郁国梁 Guoliang Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000) 201-240.

[Zg 01] 张根凯 Genkai Zhang, *Shimura invariant differential operators and their eigenvalues*, Math. Annalen, **319** (2001) 235-265.

[ZL 08] 张恭庆, 林源渠, 泛函分析讲义（上）（下）, 北京大学出版社 (2008).

[Zhu 86] 朱成熹, 测度论基础, 科学出版社 (1986).

[Zyg 59] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge (1959).

索 引

B

闭包 2, 6, 167
闭包点 (聚点) 97
闭集 2, 195
边界 97
表示的直和 112, 127
不变测度 35, 63
不可约表示 112, 151

C

缠结算子 123
常数项 173, 174
乘积拓扑 3, 6, 15

D

单的 2, 22
单位元 1, 14
道路连通 25
等距双射 93
等距映射 93
对偶定理 79, 84

F

反向极限 1, 29
反向系统 29, 34
范畴 29, 30, 134
非退化表示 202, 208
分离性公理 4

G

孤立点 97, 98
固定子群 27, 28
固有映射 37, 39, 40

J

基本邻域组 (拓扑基) 10
基本区 28, 29
尖形式 163
紧生成的 81, 84
紧性 4, 5, 17
近似单位 96, 207
局部可数紧 7, 12, 34
局部连通 23
卷积 53, 70

K

开集 2, 13
开拓扑基 (开基) 3, 4
开映射 3, 10, 12
可测集 59, 73
可数紧 7, 12

L

离散拓扑 2, 7
离散序列 113, 115
李代数 138–149
李群 138, 140
连通分支 24, 26
连通性 23–25
连续映射 3, 27
零化子 78

M

满的 2, 6, 27

N

内点 4, 12, 13
内集 4, 36, 97
拟不变测度 64, 66, 109
逆步表示 119, 120

P

陪集 1, 15, 62
平凡拓扑 2, 33

Q

齐性空间　153, 154
球面调和函数　147, 149
群　1, 7, 181
群代数 $L^1(G)$　80, 201

S

商表示　112
商空间　1, 19
射影同态　2

T

同胚映射　3, 27, 90
同态　1, 2, 5
同态的核　2, 198
拓扑变换群　27, 194, 195
拓扑空间　1–5
拓扑群　1, 7
拓扑群表示　16
拓扑群的积　19, 20

W

完全集　97, 98
万有性质　2, 3
万有锥　30
微分算子　139, 150, 195

X

相对不变测度　63, 69
向量丛　184, 191,
协变向量丛　230, 231
循环向量, 循环表示　112

Y

幺模群　56–58
幺模自同构　60
诱导表示　108, 109, 132
诱导拓扑　3, 7, 34

Z

正测度　37–39
正定函数　93, 104, 218
正规子群　1, 2, 31
正限拓扑　38
正则空间　4, 12, 20
支集　35, 40
锥　29, 30
准有限群　31, 32
子表示　112
子群　1, 2, 7
子商表示　112
左 Haar 测度　48, 49, 52

其　他

Γ 函数　99
σ-紧　92
$C^*(G)$　212, 213, 223
C* 代数　212, 213, 223
$M(G)$　217
(群的) 乘积　2
Banach 代数　74, 201
Borel 测度　35, 154
Dirac 算子　161, 191–193
Dirac 测度　38, 215
Eisenstein 级数　163, 168
Fourier 代数　216, 220
Fourier 级数 (Fourier 反演公式)　75, 150
Fourier 变换　85, 86
Fredholm 算子　228–230
Frobenius 互反公式　132
Fubini 定理　41, 55, 60
Gelfand 变换　108
Gelfand-Raikov 定理　211
Gelfond-Naimark-Segel 定理　203
Haar 测度　48
Haar 积分　44–47
Hausdorff 空间　4–6

Iwasawa 分解　164, 176，177
K 群　231, 232
Laplace 算子　146, 191
Peter Weyl 定理　125, 128
Plancherel 定理　85, 93, 212
Poisson 求和公式　90, 91
Schur 引理　122, 124, 127
Tauber 型定理　91, 92
T_0 空间　4
T_1 空间　4
T_2 空间　4

《现代数学基础丛书》已出版书目

(按出版时间排序)

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华 陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙 吕以辇 陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯 召 魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭 方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧 刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册) 1982.8 胡世华 陆钟万 著
8 有限群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬 丁同仁 黄文灶 董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔 邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册) 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯 召 魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李 忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著

30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青 段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜 陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉 冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙 吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇 张学莲 著
41 线性偏微分算子引论(下册) 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲 马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英 李 冲 杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先 霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐 云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著

64　惯性流形与近似惯性流形　2000.1　戴正德　郭柏灵　著
65　数学规划导论　2000.6　徐增堃　著
66　拓扑空间中的反例　2000.6　汪　林　杨富春　编著
67　拓扑空间论　2000.7　高国士　著
68　非经典数理逻辑与近似推理　2000.9　王国俊　著
69　序半群引论　2001.1　谢祥云　著
70　动力系统的定性与分支理论　2001.2　罗定军　张　祥　董梅芳　编著
71　随机分析学基础(第二版)　2001.3　黄志远　著
72　非线性动力系统分析引论　2001.9　盛昭瀚　马军海　著
73　高斯过程的样本轨道性质　2001.11　林正炎　陆传荣　张立新　著
74　数组合地图论　2001.11　刘彦佩　著
75　光滑映射的奇点理论　2002.1　李养成　著
76　动力系统的周期解与分支理论　2002.4　韩茂安　著
77　神经动力学模型方法和应用　2002.4　阮炯　顾凡及　蔡志杰　编著
78　同调论——代数拓扑之一　2002.7　沈信耀　著
79　金兹堡-朗道方程　2002.8　郭柏灵等　著
80　排队论基础　2002.10　孙荣恒　李建平　著
81　算子代数上线性映射引论　2002.12　侯晋川　崔建莲　著
82　微分方法中的变分方法　2003.2　陆文端　著
83　周期小波及其应用　2003.3　彭思龙　李登峰　谌秋辉　著
84　集值分析　2003.8　李　雷　吴从炘　著
85　数理逻辑引论与归结原理　2003.8　王国俊　著
86　强偏差定理与分析方法　2003.8　刘　文　著
87　椭圆与抛物型方程引论　2003.9　伍卓群　尹景学　王春朋　著
88　有限典型群子空间轨道生成的格(第二版)　2003.10　万哲先　霍元极　著
89　调和分析及其在偏微分方程中的应用(第二版)　2004.3　苗长兴　著
90　稳定性和单纯性理论　2004.6　史念东　著
91　发展方程数值计算方法　2004.6　黄明游　编著
92　传染病动力学的数学建模与研究　2004.8　马知恩　周义仓　王稳地　靳　祯　著
93　模李超代数　2004.9　张永正　刘文德　著
94　巴拿赫空间中算子广义逆理论及其应用　2005.1　王玉文　著
95　巴拿赫空间结构和算子理想　2005.3　钟怀杰　著
96　脉冲微分系统引论　2005.3　傅希林　闫宝强　刘衍胜　著
97　代数学中的 Frobenius 结构　2005.7　汪明义　著

98 生存数据统计分析 2005.12 王启华 著
99 数理逻辑引论与归结原理(第二版) 2006.3 王国俊 著
100 数据包络分析 2006.3 魏权龄 著
101 代数群引论 2006.9 黎景辉 陈志杰 赵春来 著
102 矩阵结合方案 2006.9 王仰贤 霍元极 麻常利 著
103 椭圆曲线公钥密码导引 2006.10 祝跃飞 张亚娟 著
104 椭圆与超椭圆曲线公钥密码的理论与实现 2006.12 王学理 裴定一 著
105 散乱数据拟合的模型方法和理论 2007.1 吴宗敏 著
106 非线性演化方程的稳定性与分歧 2007.4 马 天 汪宁宏 著
107 正规族理论及其应用 2007.4 顾永兴 庞学诚 方明亮 著
108 组合网络理论 2007.5 徐俊明 著
109 矩阵的半张量积:理论与应用 2007.5 程代展 齐洪胜 著
110 鞅与 Banach 空间几何学 2007.5 刘培德 著
111 非线性常微分方程边值问题 2007.6 葛渭高 著
112 戴维-斯特瓦尔松方程 2007.5 戴正德 蒋慕蓉 李栋龙 著
113 广义哈密顿系统理论及其应用 2007.7 李继彬 赵晓华 刘正荣 著
114 Adams 谱序列和球面稳定同伦群 2007.7 林金坤 著
115 矩阵理论及其应用 2007.8 陈公宁 著
116 集值随机过程引论 2007.8 张文修 李寿梅 汪振鹏 高 勇 著
117 偏微分方程的调和分析方法 2008.1 苗长兴 张 波 著
118 拓扑动力系统概论 2008.1 叶向东 黄 文 邵 松 著
119 线性微分方程的非线性扰动(第二版) 2008.3 徐登洲 马如云 著
120 数组合地图论(第二版) 2008.3 刘彦佩 著
121 半群的 S-系理论(第二版) 2008.3 刘仲奎 乔虎生 著
122 巴拿赫空间引论(第二版) 2008.4 定光桂 著
123 拓扑空间论(第二版) 2008.4 高国士 著
124 非经典数理逻辑与近似推理(第二版) 2008.5 王国俊 著
125 非参数蒙特卡罗检验及其应用 2008.8 朱力行 许王莉 著
126 Camassa-Holm 方程 2008.8 郭柏灵 田立新 杨灵娥 殷朝阳 著
127 环与代数(第二版) 2009.1 刘绍学 郭晋云 朱 彬 韩 阳 著
128 泛函微分方程的相空间理论及应用 2009.4 王 克 范 猛 著
129 概率论基础(第二版) 2009.8 严士健 王隽骧 刘秀芳 著
130 自相似集的结构 2010.1 周作领 瞿成勤 朱智伟 著
131 现代统计研究基础 2010.3 王启华 史宁中 耿 直 主编

132　图的可嵌入性理论(第二版)　2010.3　刘彦佩　著
133　非线性波动方程的现代方法(第二版)　2010.4　苗长兴　著
134　算子代数与非交换 L_p 空间引论　2010.5　许全华、吐尔德别克、陈泽乾　著
135　非线性椭圆型方程　2010.7　王明新　著
136　流形拓扑学　2010.8　马　天　著
137　局部域上的调和分析与分形分析及其应用　2011.6　苏维宜　著
138　Zakharov 方程及其孤立波解　2011.6　郭柏灵　甘在会　张景军　著
139　反应扩散方程引论(第二版)　2011.9　叶其孝　李正元　王明新　吴雅萍　著
140　代数模型论引论　2011.10　史念东　著
141　拓扑动力系统——从拓扑方法到遍历理论方法　2011.12　周作领　尹建东　许绍元　著
142　Littlewood-Paley 理论及其在流体动力学方程中的应用　2012.3　苗长兴　吴家宏　章志飞　著
143　有约束条件的统计推断及其应用　2012.3　王金德　著
144　混沌、Mel'nikov 方法及新发展　2012.6　李继彬　陈凤娟　著
145　现代统计模型　2012.6　薛留根　著
146　金融数学引论　2012.7　严加安　著
147　零过多数据的统计分析及其应用　2013.1　解锋昌　韦博成　林金官　编著
148　分形分析引论　2013.6　胡家信　著
149　索伯列夫空间导论　2013.8　陈国旺　编著
150　广义估计方程估计方程　2013.8　周　勇　著
151　统计质量控制图理论与方法　2013.8　王兆军　邹长亮　李忠华　著
152　有限群初步　2014.1　徐明曜　著
153　拓扑群引论(第二版)　2014.3　黎景辉　冯绪宁　著